

[$a=0$ だと図形が定まらない。

以下、 $a \neq 0$ という仮定のもとで解く。]

一般に $A(b,0)$ ($b \neq 0$) に対し、 (b,b^2) における接線の式は

$$y = 2bx - b^2 \quad \text{であるので、}$$

x 軸との交点は $P(\frac{b}{2}, 0)$ である。

よって、 $A_2(\frac{a}{2}, 0), A_3(\frac{a}{2^2}, 0), \dots, A_n(\frac{a}{2^{n-1}}, 0), \dots$ である。

(1) ・ $a > 0$ のとき、求める体積は C を回転してできる立体の部分から三角錐を引いたもの で、立式すると

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a}{2}}^a \pi(t^2)^2 dt - \frac{1}{3} \frac{a}{2} \pi(a^2)^2 &= \frac{31\pi}{160} a^5 - \frac{\pi}{6} a^5 \\ &= \frac{13\pi}{480} a^5 \end{aligned}$$

・ $a < 0$ のときは、積分や錐の高さの向きが逆になり、
上の結果が -1 倍されたものになる。

以上 2 つの場合をまとめて、求める体積は

$$\frac{13\pi}{480} |a|^5 \dots \text{ (答)}$$

(2) (3)の記号 V_n を用いると、(1)と同様にして、 $a > 0$ のとき、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a}{2^n}}^{\frac{a}{2^{n-1}}} \pi(t^2)^2 dt - \frac{1}{3} \frac{a}{2^n} \pi\left\{\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)^2\right\}^2 &= \frac{31\pi}{160} \frac{a^5}{2^{5(n-1)}} - \frac{\pi}{6} \frac{a^5}{2^{5(n-1)}} \\ &= \frac{13\pi}{480} \frac{a^5}{2^{5(n-1)}} \end{aligned}$$

であるから、 $a < 0$ のときとまとめて

$$V_n = \frac{13\pi}{480} \frac{|a|^5}{2^{5(n-1)}} \quad \text{である。}$$

求める体積は、上で $n=2$ の場合だから、その値は

$$\frac{13\pi}{15360} |a|^5 \dots \text{ (答)}$$

(3) (2)の結果から、自然数 N に対して、

$$\sum_{n=1}^N V_n = \frac{13\pi}{480} |a|^5 \times \frac{1 - \frac{1}{2^{5N}}}{1 - \frac{1}{2^5}} \quad \text{である。 (等比数列の和。)}$$

$N \rightarrow \infty$ として、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} V_n &= \frac{13\pi}{480} |a|^5 \times \frac{1 - 0}{1 - \frac{1}{2^5}} \\ &= \frac{13\pi}{480} |a|^5 \times \frac{32}{31} \\ &= \frac{13\pi}{465} |a|^5 \dots \text{ (答)} \end{aligned}$$

[以下、「 a, b, c, d は実数」という仮定のもとで解く。]

(1) ケーリー・ハミルトンの定理

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

$$\therefore A^2 = (a+d)A - (ad-bc)E \cdots \textcircled{1}$$

①より、

$$\begin{aligned} A^3 &= A\{(a+d)A - (ad-bc)E\} \\ &= (a+d)^2 A - (a+d)(ad-bc)E - (ad-bc)A \end{aligned}$$

となるから、

$$\text{題の条件 } A^3 = E$$

$$\Leftrightarrow \{(a+d)^2 - (ad-bc)\}A = \{(a+d)(ad-bc) + 1\}E \cdots \textcircled{2}$$

である。

②において、 $(a+d)^2 - (ad-bc) \neq 0$ とすると割って $A = kE$ (k : 実数) の形である。しかしこのとき $k^3 = 1$ $\therefore k=1$ となり、仮定 $A \neq E$ と矛盾する。

したがって、 $(a+d)^2 - (ad-bc) = 0$ である。

(証終)

(2) (1)の議論から、
題の条件 $\Leftrightarrow$ ②

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+d)^2 - (ad-bc) = 0 \\ (a+d)(ad-bc) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc = (a+d)^2 \\ (a+d)(a+d)^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc = (a+d)^2 \\ (a+d)^3 = -1 \end{cases}$$

で、最下の式から $a+d = \underline{-1} \cdots$ (答) を得る。