

(1)(a)

ある2色の玉の場所, 例えば赤玉と黄玉の場所を考えて

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 = 15 \cdot 6 = 90 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 90 通り

(b)

並べる場所に1から6までの番号を付け, 1に赤玉, 2に黄玉をおき, 同じ色の玉が隣合わないような並べ方を考える。

(i) 赤(1, 3)のとき, 黄(2, 5)となる。

(ii) 赤(1, 4)のとき, 黄(2, 5), または(2, 6)となる。

(iii) 赤(1, 5)のとき, 黄(2, 4)となる。

(iv) 赤(1, 6)のとき, 黄(2, 4)となる。

1に赤玉, 2に黄玉をおいたとき, 以上5通りが考えられ, 色の組み合わせは $3! = 6$ 通りであるから, 求める場合の数は $5 \cdot 6 = 30$ (通り)である。

(答) 30 通り

(2)

求める単位ベクトルを $\vec{e} = (x, y, z)$ とする。 $\vec{e}$ は

$$\begin{cases} |\vec{e}|^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \vec{a} \cdot \vec{e} = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3z = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{e} = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \end{cases}$$

を満たす。これを解いて

$$\vec{e} = \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \mp \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \text{ (復号同順)}$$

となる。

(答) $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \mp \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ (復号同順)

(3)

$a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 6(n+1)$ より, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 6(k+1) \\ &= 3 + 6 \left\{ \frac{1}{2} \cdot n(n-1) + (n-1) \right\} \\ &= 3(n^2 + n - 1) \end{aligned}$$

である。これは $n=1$ でも成立する。よって

$$a_n = 3(n^2 + n - 1) \quad (n=1, 2, \dots)$$

である。

(答) $a_n = 3(n^2 + n - 1) \quad (n=1, 2, \dots)$

〔解答〕

ア 2 イ 2 ウ 4 エ 1 オ 2
カ 2 キ 8 ク 9

〔解説〕

ア～クにそれぞれ $a \sim h$ を対応させる。 $a \sim h$ はすべて 1 けたの自然数($\cdots$ ①)である。条件より

$$ax^2 - bx - c = a(x+d)(x-f)$$

が成立する。よって

$$b = a(f-d), c = adf$$

である。よって、①より、 $f > d$ であり、また $e = ad^2$, $g = af^2$ と①より、 (a, d, f) は $(1, 1, 2)(2, 1, 2)(1, 1, 3)(1, 2, 3)$ のいずれかである。また、放物線 C と直線 l とで囲まれた図形の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-d}^f (ax^2 - bx - c) dx &= a \int_{-d}^f (x+d)(x-f) dx \\ &= \frac{a}{6} (f+d)^3 \\ &= h \end{aligned}$$

である。以上を満たす (a, d, f) は $(2, 1, 2)$ のみであり、

$$(a, b, c, d, e, f, g, h) = (2, 2, 4, 1, 2, 2, 8, 9)$$

となる。

(1)

$$ax^2 - xy + y^2 + 11x - 7y + 10 = ax^2 + (11 - y)x + y^2 - 7y + 10 \cdots \textcircled{1}$$

である。 $y^2 - 7y + 10 = (y - 2)(y - 5)$ より, $\textcircled{1}$ は実数 p, q を使って $(px + y - 2)(qx + y - 5)$ と因数分解できる。これを展開して

$$pqx^2 + \{p(y - 5) + q(y - 2)\}x + (y - 2)(y - 5)$$

となる。この式と $\textcircled{1}$ の係数を比較して

$$p = -3, q = 2, a = -6$$

となる。

(答) $a = -6$

(2)

$P = -3x + y - 2, Q = 2x + y - 5$ と書ける。 $-3x + y - 2 = 0, 2x + y - 5 = 0$ と x 軸のなす角をそれぞれ θ_1, θ_2 とすると,

$$\tan \theta_1 = 3, \tan \theta_2 = -2$$

である。

$$\begin{aligned} \tan(\theta_2 - \theta_1) &= \frac{(-2) - 3}{1 + (-2) \cdot 3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

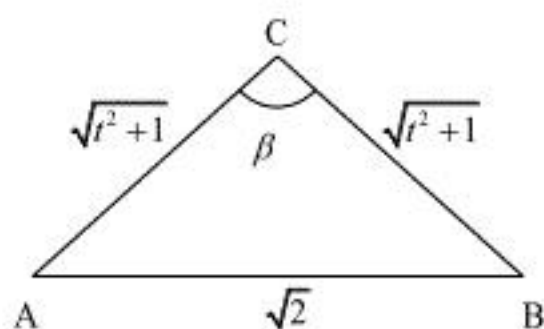
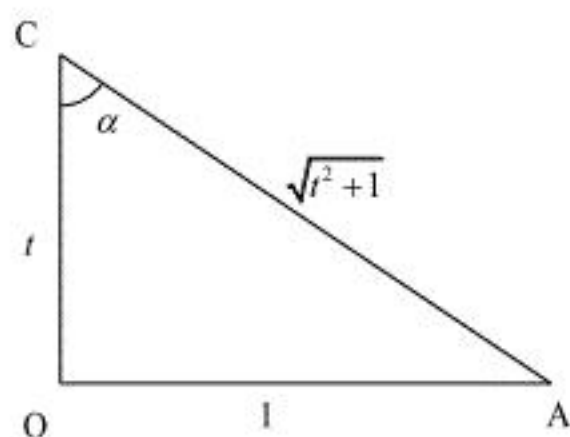
$$\Leftrightarrow \theta = 45^\circ$$

となり, これは $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ を満たす。

(答) 45°

(1)

問題の条件より、三角形 OAC と三角形 ABC の概形は下図のようになる。



上図より、三角形 OCA において、

$$u = \cos \alpha = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

であり、三角形 ABC において余弦定理を用いて

$$2 = 2(t^2 + 1) - 2(t^2 + 1)\cos \beta$$

$$\Leftrightarrow \cos \beta = \frac{t^2}{t^2 + 1}$$

となる。これが v だから、 $v = u^2$ である。

$$(\text{答}) \quad u = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, v = \frac{t^2}{1+t^2}, v = u^2$$

(2)

$2\alpha + \beta = 180^\circ$ のとき、

$$\begin{aligned} v &= \cos \beta \\ &= \cos(180^\circ - 2\alpha) \\ &= -\cos 2\alpha \\ &= 1 - 2\cos^2 \alpha \\ &= 1 - 2u^2 \\ &= 1 - 2v \end{aligned}$$

であり、 $v = \frac{1}{3}$ となり

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{t^2 + 1} &= \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow t &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となる。問題文より、 $t > 0$ だから求める答えは $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ となる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(1)

求める単位ベクトルを $\vec{e} = (x, y, z)$ とする。 $\vec{e}$ は

$$\begin{cases} |\vec{e}|^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \vec{a} \cdot \vec{e} = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3z = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{e} = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \end{cases}$$

を満たす。これを解いて

$$\vec{e} = \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \mp \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \text{ (復号同順)}$$

となる。

$$\text{(答)} \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \mp \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \text{ (復号同順)}$$

(2)

区分求積法を用いて

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n} \\ &= \int_0^1 \cos \frac{\pi}{2} x dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\sin \frac{\pi}{2} x \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

となる。 $h = \frac{c}{n}$ とおくと、

$$\begin{aligned} e^{\frac{c}{n}} a_n - a_n &= a_n (e^h - 1) \\ &= \frac{a_n}{n} \cdot \frac{e^h - 1}{h} \cdot c \end{aligned}$$

である。 $n \rightarrow \infty$ のとき $h \rightarrow 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

となり、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{c}{n}} a_n - a_n \right) &= \frac{2}{\pi} \cdot 1 \cdot c \\ &= \frac{2c}{\pi} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{2}{\pi}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{c}{n}} a_n - a_n \right) = \frac{2c}{\pi}$$

(3)

出発してから t 分後までに進んだ距離を $f(t)$ km とおき、関数 $f(t)$ ($0 \leq t \leq 120$) を定める。

すると、 $f(0) = 0, f(120) = 40$ であり、進んだ距離は時間とともに連続的に増加していくから、

$f(t)$ は連続関数である。ここで、 $g(t) = f(t+3) - f(t)$ ($0 \leq t \leq 117$) を定めると、 $g(t)$ は出発して t 分後から 3 分間に進んだ距離を表す。 $f(t+3), f(t)$ は共に連続関数だから、その差である $g(t)$ も連続関数である。さて、

$$\sum_{k=0}^{39} g(3k) = 40 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立する。いま、 $g(t) = 1$ ($0 \leq t \leq 117$) を満たす t が存在しないと仮定する。 $g(t)$ は $0 \leq t \leq 117$ において連続だから、

$$\text{「すべての } t (0 \leq t \leq 117) \text{ で } g(t) < 1 \text{」} \quad \dots \textcircled{2}$$

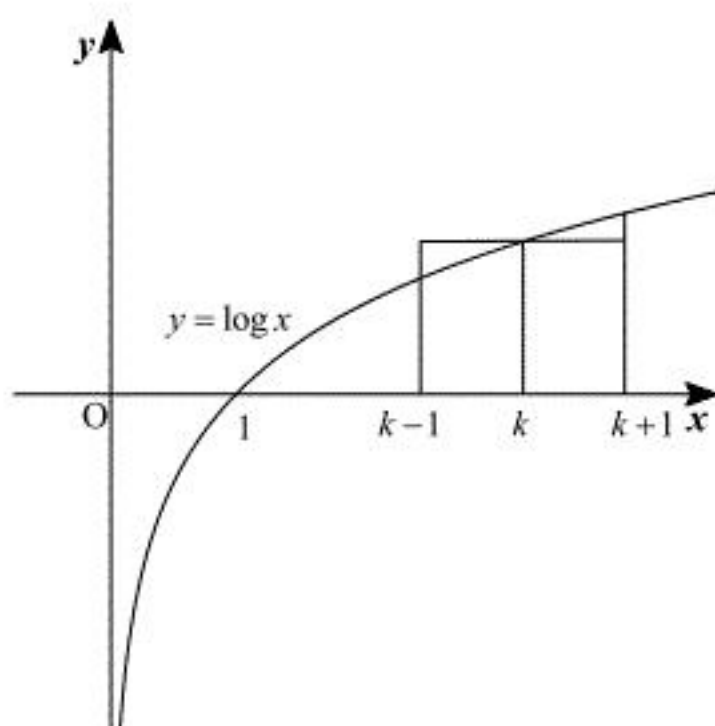
$$\text{「すべての } t (0 \leq t \leq 117) \text{ で } g(t) > 1 \text{」} \quad \dots \textcircled{3}$$

のいずれかが成立する。②のとき $\sum_{k=0}^{39} g(3k) < 40$ 、③のとき $\sum_{k=0}^{39} g(3k) > 40$ であるから、いずれ

の場合も①と矛盾する。したがって、 $g(t) = 1$ を満たす t ($0 \leq t \leq 117$) は存在する。

(証明終)

(1)



$y = \log x$ のグラフを考えて、上図より、面積を比較して

$$\int_{k-1}^k \log x dx < \log k < \int_k^{k+1} \log x dx \quad (k \geq 2)$$

が成立する。

(証明終)

(2)

(1)の不等式の $k = 2, 3, \dots, n$ ($n \geq 2$) についての和は

$$\int_1^n \log x dx < \log(2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) < \int_2^{n+1} \log x dx$$

である。 $\log x$ の不定積分の 1 つは $x(\log x - 1)$ であり、また、 $\log 1 = 0$ だから

$$n(\log n - 1) + 1 < \log n! < (n+1)\{\log(n+1) - 1\} - 2(\log 2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow \log n^n - n + 1 < \log n! < \log(n+1)^{n+1} - n + 1 - \log 4$$

となる。 $e < 4$ より、 $1 < \log 4$ だから、

$$\log n^n - n < \log n! < \log(n+1)^{n+1} - n$$

が成立する。よって、これを变形して

$$n^n e^{-n} < n! < (n+1)^{n+1} e^{-n}$$

が成立する。また、 $n=1$ のとき、 $n^n e^{-n} = \frac{1}{e}$, $n! = 1$, $(n+1)^{n+1} e^{-n} = \frac{4}{e}$ となる。ここで、 $1 < e < 4$ より

り $\frac{1}{e} < 1 < \frac{4}{e}$ である。したがって、 $n=1$ でも成立する。

(証明終)

(1)

曲線 C 上の点 (a, b) ($a \geq 1$) における接線の方程式は

$$ax - by = 1 \cdots \textcircled{1}$$

であるから、

$$d = \frac{|4a-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

となる。また、 $a^2 - b^2 = 1$ であるから

$$d = \frac{|4a-1|}{\sqrt{2a^2-1}}$$

である。ここで $L(a) = d^2$ とすると

$$L(a) = \frac{(4a-1)^2}{2a^2-1}$$

$$\begin{aligned} L'(a) &= \frac{2 \cdot 4(4a-1)(2a^2-1) - 4a(4a-1)^2}{(2a^2-1)^2} \\ &= \frac{4(4a-1)(a-2)}{(2a^2-1)^2} \end{aligned}$$

である。よって、増減表は下のようになる。

a	1		2	
$L(a)$		-	0	+
$L'(a)$		$\searrow$	7	$\nearrow$

また、 $a=1$ のとき $d=3$ であり、

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} d &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{a}}{\sqrt{2 - \frac{1}{a^2}}} \\ &= 2\sqrt{2} < 3 \end{aligned}$$

となる。以上より、 d は $a=1$ のとき最大値 3 をとり、 $a=2$ のとき最小値 $\sqrt{7}$ をとる。よって $\sqrt{7} \leq d \leq 3$ である。

(答) $\sqrt{7} \leq d \leq 3$

(2)

d は $(a, b) = (2, \pm\sqrt{3})$ のとき最小値をとるから、 $\textcircled{1}$ より求める直線の方程式は

$$2x \pm \sqrt{3}y - 1 = 0$$

である。

(答) $2x \pm \sqrt{3}y - 1 = 0$