

1

(1) 関係式

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

を用いて与えられた等式を変形すると,

$$\frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2B + \sin 2C) = \frac{1}{2}(\sin 2C + \sin 2A)$$

$$\therefore \sin 2B = 0$$

$$0 < B < \pi \text{ より, } B = \frac{\pi}{2}$$

よって, $\triangle ABC$ は $\angle B$ が直角の直角三角形 ... (1/2)

(2) 与えられた方程式は

$$(2 \cdot 2^x - 1)((2^x)^2 - 8 \cdot 2^x + 4) = 0$$

と因数分解できるから,

$$2^x = 2^{-1}, 4 \pm 2\sqrt{3}$$

$$\therefore x = -1, \log_2(4 \pm 2\sqrt{3})$$

よって, -1 以外の2つの解の和は,

$$\begin{aligned} \log_2(4 + 2\sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3}) &= \log_2 4 \\ &= 2 \quad \dots (1/2) \end{aligned}$$

(3) 部分積分により,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \left[-\frac{1}{2}(\theta - t) \cos 2t \right]_0^\theta - \frac{1}{2} \int_0^\theta \cos 2t dt \\ &= \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$f'(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \geq 0$$

よって, $f(\theta)$ は単調増加で, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ において
 $\theta = 2\pi$ で最大となり, 値は

$$f(2\pi) = \pi \quad \dots (1/2)$$

2

(1) (与不等式)

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{x}{m}\right)^2 < 1+x < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x - (m^2 - 2m)) < 0 & \dots \textcircled{1} \\ x(x - (n^2 - 2n)) > 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①が $0 < x < 1$ で成り立つ条件は,

$$\begin{aligned} m^2 - 2m &\geq 1 \\ m &\geq 1 + \sqrt{2} \quad \therefore m \geq 3 \end{aligned}$$

また, $n^2 - 2n > 0$ つまり $n > 2$ のとき, $0 < x < 1$ にかいて ②は必ずしも成り立たない。 $n = 2$ のときは

②は $x^2 > 0$ となるからよく,

$$\begin{cases} \text{最小の } m : 3 \\ \text{最大の } n : 2 \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

(2) (1) にかいて $m=3, n=2, x=0.0006$ とすれば,

$$0.0002 < \sqrt{1.0006} - 1 < 0.0003$$

となるから, 小数第4位にはじめて 0でない数字が現れ, その数字は 2 $\dots (\text{答})$

3

(1) 曲線 C の点 $P_n(x_{n-1}, e^{-\frac{x_{n-1}}{2}})$

における接線 l_n の方程式は,

$$l_n: y = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x_{n-1}}{2}}(x - x_{n-1}) + e^{-\frac{x_{n-1}}{2}}$$

2 点 $Q_n(x_n, 0)$ を通るから,

$$0 = -\frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) + 1$$

$$x_n - x_{n-1} = 2$$

$x_0 = 0$ と $n=1$ より,

$$x_n = 2n \quad (n \geq 0)$$

よって,

$$S_n = \int_{2(n-1)}^{2n} e^{-\frac{x}{2}} dx - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{-(n-1)}$$

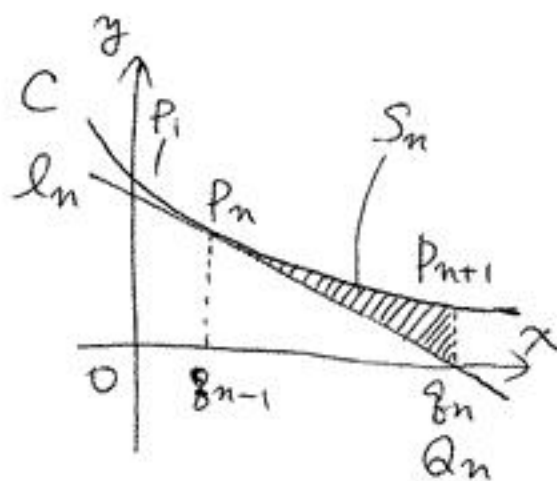
$$= 2(e^{-(n-1)} - e^{-n}) - e^{-(n-1)}$$

$$= e^{-(n-1)} - 2e^{-n}$$

$$= (e-2)e^{-n} \quad \dots \left(\frac{e-2}{e}\right)$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} S_n = (e-2) \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}$$

$$= \frac{e-2}{e-1} \quad \dots \left(\frac{e-2}{e-1}\right)$$



4

曲線 $y=f(x)$ の $x=1$ から $x=t$ までの長さは

$$\int_1^t \sqrt{1+f'(s)^2} ds = \frac{1}{4} (t^2 + 2\log t - 1)$$

であり, 2つを t で微分すると,

$$\sqrt{1+f'(t)^2} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)$$

$$f'(t)^2 = \frac{1}{4} \left(t + \frac{1}{t} \right)^2 - 1 = \frac{1}{4} \left(t - \frac{1}{t} \right)^2$$

より, $f(1)=0$, $f(x) \geq 0$ ($x \geq 1$) より,

$f'(x) < 0$ ($x > 1$) とは右から右へから, $t - \frac{1}{t}$ ($t > 1$)
より, $f'(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$

$$f(x) - f(1) = \int_1^x f'(s) ds$$

$f(1)=0$ より,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\frac{1}{4} s^2 - \frac{1}{2} \log s \right]_1^x \\ &= \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} \log x - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

より, 求める面積 $S(t)$ は,

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_1^t f(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{2} x (\log x - 1) - \frac{1}{4} x \right]_1^t \\ &= \frac{1}{12} t^3 - \frac{1}{2} t \log t + \frac{1}{4} t - \frac{1}{3} \quad \dots \left(\frac{\sqrt{e}}{12} \right) \end{aligned}$$