

1

(1)

(i) $n = 1$ のとき

$$pa_1 = q \text{ より } a_1 = \frac{q}{p}$$

(ii) $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} p^n a_n &= \sum_{k=1}^n p^k a_k - \sum_{k=1}^{n-1} p^k a_k = q^n - q^{n-1} \text{ より} \\ a_n &= \left(\frac{q}{p}\right)^n \left(1 - \frac{1}{q}\right) \end{aligned}$$

(2)

$n = 1$ のとき

$$S_1 = a_1 = \frac{q}{p}$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{q}{p}\right)^k \left(1 - \frac{1}{q}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{q}{p}\right)^k - \frac{1}{p} \sum_{k=2}^n \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

$p = q$ の場合

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n 1 - \frac{1}{p} \sum_{k=2}^n 1 \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)n + \frac{1}{p} \end{aligned}$$

このとき $n = 1$ のときも成り立つ.

$p \neq q$ の場合

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\frac{q}{p}\{1 - (\frac{q}{p})^n\}}{1 - \frac{q}{p}} - \frac{1}{p} \cdot \frac{\frac{q}{p}\{1 - (\frac{q}{p})^{n-1}\}}{1 - \frac{q}{p}} \\ &= \frac{q(p^n - q^n - p^{n-1} + q^{n-1})}{p^n(p - q)} \end{aligned}$$

このとき $n = 1$ のときも成り立つ.

以上より,

$$\left\{ \begin{array}{l} p = q \text{ の場合} \\ S_n = \left(1 - \frac{1}{p}\right)n + \frac{1}{p} \\ p \neq q \text{ の場合} \\ S_n = \frac{q(p^n - q^n - p^{n-1} + q^{n-1})}{p^n(p - q)} \end{array} \right.$$

2

(1)

$$A = \int_0^a f(t)dt$$

とすると, $f(x) = 3ax^2 + 2x - Aa$ となるから

$$\begin{aligned} \int_0^a f(t)dt &= \int_0^a (3at^2 + 2t - Aa)dt \\ &= [at^3 + t^2 - Aat]_0^a \\ &= a^4 + a^2 - Aa^2 = A \end{aligned}$$

$$\therefore (1 + a^2)(A - a^2) = 0$$

$1 + a^2 > 0$ より $A = a^2$ なので

$$f(x) = 3ax^2 + 2x - a^3$$

(2)

$$f(-a) = 2a^3 - 2a$$

から

$$\frac{d}{da}f(-a) = 2(3a^2 - 1)$$

なので

a	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	1
$\frac{d}{da}f(-a)$		-	0	+	
$f(-a)$	0	$\searrow$	$-\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	0

増減表から, $f(-a)$ は $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ で最小値 $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$, $a = 0, 1$ で最大値 0 をとる.

3

(1)

メネラウスの定理から,

$$\frac{PT}{AP} \cdot \frac{BO}{TB} \cdot \frac{MA}{OM} = \frac{PT}{AP} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore \frac{PT}{AP} = \frac{1-\alpha}{1}$$

したがって,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{1-2\alpha} \overrightarrow{OT} = \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \overrightarrow{OA} + \frac{\alpha}{2-\alpha} \overrightarrow{OB}$$

(2)

点 Q は直線 MT 上にあるので

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + s\overrightarrow{MT}$$

とおくことができる. このとき, 実数 s を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + s \left(\alpha \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \right) = \frac{1}{2} (1-s) \overrightarrow{OA} + s\alpha \overrightarrow{OB}$$

と変形できるが, Q は直線 AB 上にあるので

$$\frac{1}{2} (1-s) + s\alpha = 1 \quad \therefore s = \frac{1}{2\alpha-1}$$

したがって

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\alpha-1}{2\alpha-1} \overrightarrow{OA} + \frac{\alpha}{2\alpha-1} \overrightarrow{OB}$$

また, 同様に点 R は直線 PQ 上にあるので実数 t を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OQ} + t\overrightarrow{QP} \\ &= \left\{ \frac{\alpha-1}{2\alpha-1} + t \left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{\alpha-1}{2\alpha-1} \right) \right\} \overrightarrow{OA} + \left\{ \frac{\alpha}{2\alpha-1} + t \left(\frac{\alpha}{2-\alpha} - \frac{\alpha}{2\alpha-1} \right) \right\} \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

と表すことができる. このとき, 点 R は直線 OA 上にあるので

$$\frac{\alpha}{2\alpha-1} + t \left(\frac{\alpha}{2-\alpha} - \frac{\alpha}{2\alpha-1} \right) = 0 \quad \therefore t = \frac{\alpha-2}{3\alpha-3}$$

したがって

$$\overrightarrow{OR} = \left\{ \frac{\alpha-1}{2\alpha-1} + \frac{\alpha-2}{3\alpha-3} \left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{\alpha-1}{2\alpha-1} \right) \right\} \overrightarrow{OA} = \frac{2}{3} \overrightarrow{OA}$$

より

$$OR : RA = 2 : 1$$

(1) (証明)

$\widehat{BC}$ のうち, A が無い側の任意の位置に点 A' を取れば, 四角形 $ABA'C$ は円に内接するので

$$\angle BA'C = 180^\circ - \angle BAC = 60^\circ$$

であり, また, 直線 m と n はそれぞれ点 B と点 C で円に接しているから

$$\angle DBC = \angle DCB = \angle BA'C = 60^\circ$$

したがって 3 つの角が全て 60° なので $\triangle BCD$ は正三角形

(証明終)

ここで $\triangle ABC$ において正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin \angle A} = 2 \quad \therefore BC = \sqrt{3}$$

なので, $\triangle BCD$ の 1 辺の長さは $\sqrt{3}$

(2)

$\triangle ABC$ において, 正弦定理より

$$AB = 2 \sin \alpha$$

$\triangle EBA$ において, $\angle EBA = 60^\circ - \beta = \alpha$, $\angle EAB = \alpha$ から正弦定理より

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} &= \frac{BE}{\sin \alpha} \\ \therefore BE &= \frac{2 \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \tan \alpha \end{aligned}$$

(3) (証明)

(2) と同様にして

$$CF = \tan \beta$$

したがって

$$\begin{aligned} \triangle DEF &= \frac{DE}{DB} \triangle DBF \\ &= \frac{\sqrt{3} - \tan \alpha}{\sqrt{3}} \cdot \frac{DF}{CD} \triangle DBC \\ &= \frac{(\sqrt{3} - \tan \alpha)(\sqrt{3} - \tan \beta)}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

ここで, $\alpha + \beta = 60^\circ$ より

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \quad \therefore \tan \alpha + \tan \beta = \sqrt{3}(1 - \tan \alpha \tan \beta)$$

を使うと

$$\triangle DEF = \frac{\sqrt{3}}{4} (3 - \sqrt{3}(\tan \alpha \tan \beta) + \tan \alpha \tan \beta) = \sqrt{3} \tan \alpha \tan \beta$$

(証明終)