

1

(1) (証明)

$g(x) = x - \log x$ とすると

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

より

x	0	...	1	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

増減表から, $g(x)$ は $x = 1$ で最小値 1 をとるので, $x > 0$ の範囲では $g(x) > 0$. したがって

$$\log x < x$$

(証明終)

このことから

$$0 < \frac{\log x}{x^2} < \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

がわかる. ここで

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

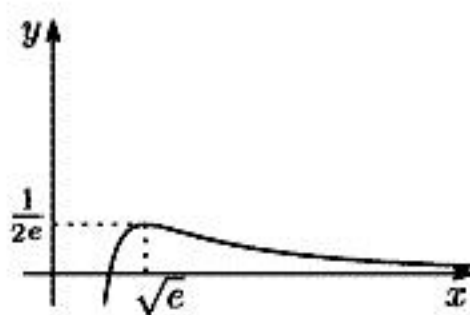
なので, はさみうちの原理から

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^2} = 0$$

(2) $f'(x) = \frac{1 - 2\log x}{x^3}$ より, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$ なので

x	0	...	$\sqrt{e}$	...	∞
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

増減表より, $f(x)$ は $x = \sqrt{e}$ で極大値 $\frac{1}{2e}$ をとり, グラフは右図のようになることがわかる.



(3)

(1),(2) より $\alpha = \sqrt{e}$ なので, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\alpha} f(x) dx \\ &= \left[-\frac{\log x}{x} \right]_1^{\alpha} + \int_1^{\alpha} \frac{dx}{x^2} \\ &= \left[-\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^{\alpha} \\ &= 1 - \frac{3}{2\sqrt{e}} \end{aligned}$$

(1)

点 P の y 座標は t なので, その x 座標 ($x \geq 0$) は

$$x^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore x = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{t - t^2}$$

となる. ここで, 点 R を通る, x 軸に平行な直線と y 軸との交点を H とすると, $\triangle OQA$ と $\triangle OPH$ が相似ということから

$$R\left(\frac{\sqrt{t-t^2}}{t}, t\right)$$

(2)

(1) より, 点 R の軌跡を表す式は

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{y-y^2}}{y} \\ y\{(1+x^2)y-1\} &= 0 \end{aligned}$$

ここで $\frac{1}{2} \leq t = y \leq 1$ なので

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

また, $y = \frac{1}{2}$ のとき $x = 1$ となるから, 求める面積 S は

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$$