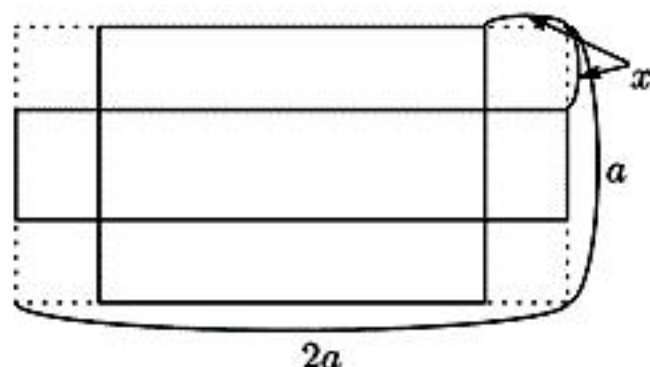


切り取る正方形の一辺の長さを x ($x > 0$) とする。このとき、できる容器は縦 $a - 2x$ 、横 $2a - 2x$ 、高さ x である。これらはすべて正の値をとらないといけなないので、 x の定義域は $0 < x < \frac{a}{2}$ である。



容器の容積を x の関数として $V(x)$ と書くことにすると、

$$V(x) = x(2a - 2x)(a - 2x) = 4x^3 - 6ax^2 + 2a^2x$$

となる。これを x で微分して、

$$V'(x) = 12x^2 - 12ax + 2a^2$$

となる。よって、 $0 < x < \frac{a}{2}$ に注意すると、 $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}a$ である。従って、 $V(x)$ の増減は右のようになる。ここから、 $V(x)$ は $x = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}a$ で最大になる。このときの最大値は、

$$V(x) = V'(x) \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a \right) + \left(-\frac{2}{3}a^2x + \frac{1}{3}a^3 \right)$$

なので、

$$\begin{aligned} V \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}a \right) &= -\frac{2}{3}a^2 \times \frac{3 - \sqrt{3}}{6}a + \frac{1}{3}a^3 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9}a^3 \end{aligned}$$

である。

実数 x について,

$$x^2 + ax + b = |x| \quad \cdots (*)$$

が満たされることと,

$$x \geq 0 \text{ かつ } x^2 + ax + b = x$$

または

$$x < 0 \text{ かつ } x^2 + ax + b = -x$$

は同値である。よって、(*) の実数解とは、 $x^2 + ax + b = x$ の $x \geq 0$ における解と、 $x^2 + ax + b = -x$ の $x < 0$ における解の和集合である。ところで、これらはすべて2次方程式であるから、解は $x \geq 0$ と $x < 0$ それぞれについて高々2個である。よって、(*) が相異なる4つの実数解を持つのは、 $x^2 + ax + b = x$ が $x \geq 0$ で相異なる2つの解を持ち、かつ $x^2 + ax + b = -x$ が $x < 0$ で相異なる2つの解を持つことと同値である。

最初の条件は,

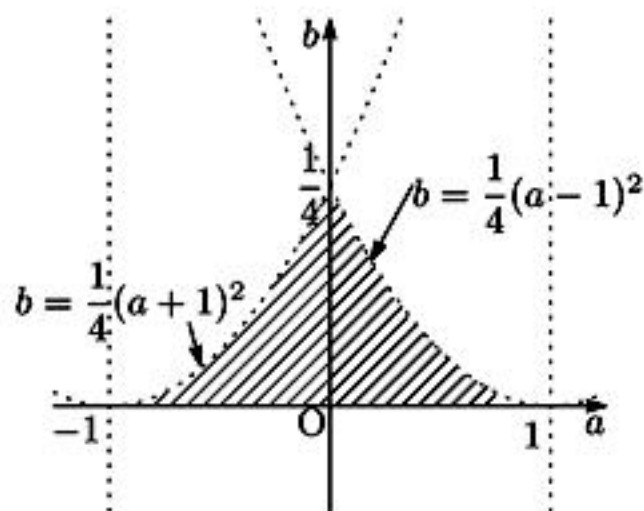
$$\begin{cases} \text{判別式 } D = (a-1)^2 - 4b > 0 \\ \text{軸} - \frac{a-1}{2} > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$

と同値であり、二つめの条件は,

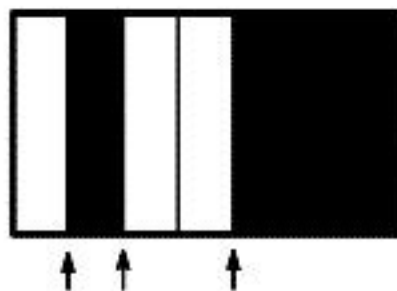
$$\begin{cases} \text{判別式 } D = (a+1)^2 - 4b > 0 \\ \text{軸} - \frac{a+1}{2} < 0 \\ b > 0 \end{cases}$$

と同値である。

これらの共通部分をとって、右の領域を得る。ただし、境界は含まない。



(1) バーとスペースの境目は 3 ヶ所ある。その 3 ヶ所を選べば、バーコードは 1 つに決まるから、求めるバーコードの総数は、 ${}_6C_3 = 20$ 通りである。



(2)(1) と同様に考えると、枠の境目の $n-1$ 個のうち、スペースとバーの境目となる $2k-1$ 個を選べばいいから、バーコードの総数は ${}_{n-1}C_{2k-1}$ 個である。これが 100 を越えるような k が選べるような n を考える。

- $n = 6$ のとき、 ${}_{n-1}C_{2k-1} \leq {}_5C_2 = 10$ なので不適。
- $n = 7$ のとき、 ${}_{n-1}C_{2k-1} \leq {}_6C_3 = 20$ なので不適。
- $n = 8$ のとき、 ${}_{n-1}C_{2k-1} \leq {}_7C_3 = 35$ なので不適。
- $n = 9$ のとき、 ${}_{n-1}C_{2k-1} \leq {}_8C_4 = 70$ なので不適。
- $n = 10$ のとき、 ${}_{n-1}C_{2k-1} \leq {}_9C_5 = 126$ となり $k = 3$ で適する。

以上より、最小の n は 10 で、そのときの k は 3 である。

(1) $\alpha^3 - 1 = 0$ かつ $\alpha - 1 \neq 0$ であるから, $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ である. よって,

$$(\alpha + 1)^2 = \alpha^2 + \alpha + 1 + \alpha = \alpha$$

である. 従って,

$$\begin{aligned} (\alpha + 1)^{2006} &= \left((\alpha + 1)^2 \right)^{1003} \\ &= \alpha^{1003} \\ &= (\alpha^3)^{334} \cdot \alpha \\ &= \alpha \end{aligned}$$

である. ゆえに $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ を解いて,

$$(\alpha + 1)^{2006} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

となるので, $(p, q) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ である.

(2) $\overrightarrow{AB} = (1, 3, -1)$ である. P は直線 AB 上にあることから, ある実数 λ が存在して,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB} \cdots (*)$$

と書くことができる. $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ なので,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= 2 + 11\lambda \end{aligned}$$

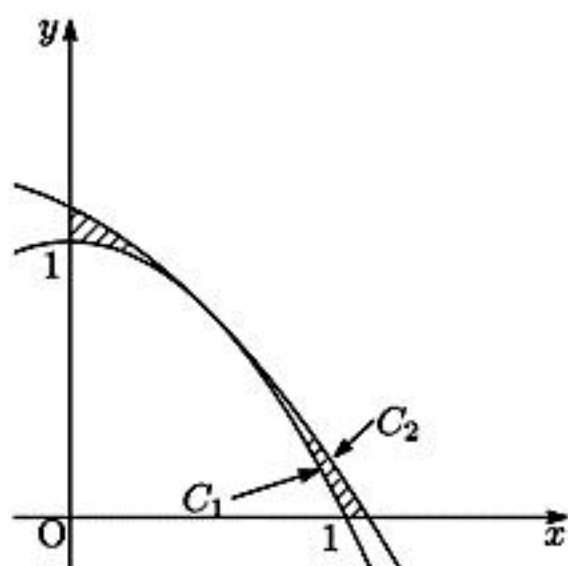
より, $\lambda = -\frac{2}{11}$ である. 従って, (*) に代入して,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{11} (9, 5, 24)$$

である. よって $P \left(\frac{9}{11}, \frac{5}{11}, \frac{24}{11} \right)$ となる.

(1) C_1 と C_2 の共有点の x 座標は、方程式 $1 - x^2 = b - \frac{1}{2}(x+a)^2$ の解である。これを整理して、 $x^2 - 2ax - a^2 + 2b - 2 = 0$ となる。共有点が一つなので、この方程式は重解をもたねばならず、従って $a^2 = -a^2 + 2b - 2$ より、 $b = a^2 + 1$ を得る。

(2) 問題の領域を図示すると右図のようになる。この面積は、二つの座標軸と C_2 で囲まれる部分の面積から、同じく二つの座標軸と C_1 で囲まれる部分の面積を引けば求まる。
 $b - \frac{1}{2}(x+a)^2 = 0$ の解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、



$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^\beta \left(-\frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta) \right) dx - \int_0^1 (1-x^2) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3 + \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\beta)^2 \right]_0^\beta - \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}\beta^2(\beta-3\alpha) - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。ここで、(1) より、 α, β が満たす方程式は $(x+a)^2 - 2(a^2+1) = 0$ である。よって、

$$\begin{aligned} \alpha &= -a - \sqrt{2a^2+2} \\ \beta &= -a + \sqrt{2a^2+2} \end{aligned}$$

となるから、これを上の式に代入すると、

$$S(a) = \frac{1}{3} \left(\sqrt{2a^2+2} - a \right)^2 \left(2\sqrt{2a^2+2} + a \right) - \frac{2}{3}$$

を得る。

(3)

$$S(a) = -\frac{2}{3} - a - \frac{5}{6}a^3 + \frac{2\sqrt{2}}{3}(1+a^2)^{\frac{3}{2}}$$

なので、微分すると、

$$S'(a) = -1 - \frac{5}{2}a^2 + 2\sqrt{2}a(1+a^2)^{\frac{1}{2}}$$

である。よって、 $S'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{14}}{2}$ であり、この前後で符号が負から正に変化するので、最小値をとる a は $a = \frac{\sqrt{14}}{2}$ である。

(1) $f(x) = x \tan^2 \frac{\pi x}{4}$ とおく. $\tan \frac{\pi x}{4}$ は $0 \leq x \leq 1$ で増加関数だから, $f(x)$ も増加関数である. よって,

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdots (*)$$

である. (*) の左側の不等式を k を 1 から n まで変化させてすべて加えると,

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k \tan^2 \frac{\pi k}{4n} \leq \int_0^1 x \tan^2 \frac{\pi x}{4} dx$$

を得る. 一方, (*) の右側の不等式を k を 1 から $n-1$ まで変化させてすべて加えると,

$$\int_0^{\frac{n-1}{n}} x \tan^2 \frac{\pi x}{4} dx \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k \tan^2 \frac{\pi k}{4n}$$

であるが, この左辺は変数変換によって, $\int_{\frac{1}{n}}^1 \left(x - \frac{1}{n}\right) \tan^2 \left\{ \frac{\pi}{4} \left(x - \frac{1}{n}\right) \right\} dx$ と書き直せるので,

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 \left(x - \frac{1}{n}\right) \tan^2 \left\{ \frac{\pi}{4} \left(x - \frac{1}{n}\right) \right\} dx \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k \tan^2 \frac{\pi k}{4n}$$

を得る. 以上より, 問題の不等式が示された.

(2) 区分求積による積分の定義から,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k \tan^2 \frac{\pi k}{4n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \tan^2 \frac{\pi k}{4n} \\ &= \int_0^1 x \tan^2 \frac{\pi x}{4} dx \end{aligned}$$

であるので, この積分を計算する.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \tan^2 \frac{\pi x}{4} dx &= \int_0^1 x \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{4}} - 1 \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} + \left[\frac{4x}{\pi} \tan \frac{\pi x}{4} \right]_0^1 - \frac{4}{\pi} \int_0^1 \tan \frac{\pi x}{4} dx \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} - \frac{16}{\pi^2} \left[-\log \left| \cos \frac{\pi x}{4} \right| \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} - \frac{8 \log 2}{\pi^2} \end{aligned}$$

(1) $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおく. X は逆行列をもつので $ps - qr \neq 0$ である.

$$AX = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}, XA = \begin{pmatrix} ap + cq & bp + dq \\ ar + cs & br + ds \end{pmatrix}$$

なので, 成分比較により, $AX = XA$ となることと,

$$\begin{cases} br = cq \\ (a-d)q = b(p-s) \\ (a-d)r = c(s-p) \end{cases} \cdots (*)$$

が同値である. よって問題の条件は, $(*)$ が任意の p, q, r, s ($ps - qr \neq 0$) について成り立つことと同値である.

ここで, $(*)$ で $p = s = 1$ かつ $r = 0$ とおくと,

$$\begin{cases} cq = 0 \\ (a-d)q = 0 \end{cases}$$

となる. $ps - qr \neq 0$ だから $q \neq 0$ であって, これを満たす任意の q について上の式が満たされるためには $a = d$ かつ $c = 0$ が必要である.

同様に, $(*)$ で $p = s = 1$ かつ $q = 0$ とおくと,

$$\begin{cases} br = 0 \\ (a-d)r = 0 \end{cases}$$

となる. $ps - qr \neq 0$ だから $r \neq 0$ であって, これを満たす任意の r について上の式が満たされるためには $a = d$ かつ $b = 0$ が必要である.

逆に $a = d$ かつ $b = c = 0$ であれば, $(*)$ が満たされるから, これが求める必要十分条件である.

(2) $Y \in H$ より, $Y = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$ とおくことができる. $AYA^{-1} \in H$ なので, ある 0 でない実数 s が存在して,

$$AYA^{-1} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

と書くことができる. 両辺に右から A をかけると,

$$A \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix} A \cdots (**)$$

を得る. 問題の条件は 0 でないすべての実数 t について, $(**)$ を満たすような s が存在することと同値である. $(**)$ の両辺を計算して成分比較を実行すると,

$$\begin{cases} a(t-s) = 0 \\ b(s - \frac{1}{t}) = 0 \\ c(\frac{1}{s} - t) = 0 \\ d(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}) = 0 \end{cases}$$

を得る. 以下場合分けをする.

1. $a \neq 0$ または $d \neq 0$ のとき, $s = t$ とならねばならない. すると,

$$\begin{cases} b(t - \frac{1}{t}) = 0 \\ c(t - \frac{1}{t}) = 0 \end{cases}$$

が任意の t で成立しなくてはならないから, $b = c = 0$ でなくてはならない. このとき, $(**)$ は成立する.

2. $a = d = 0$ のとき, t をどうとてきても $s = \frac{1}{t}$ とおけば, b, c は何であつても上の 4 つの式は同時に満たされる.

以上の考察から, 求める条件は $a = d = 0$ または $b = c = 0$ である.