

$$(1) S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} \text{ とおく.}$$

$$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right)$$

であることに注意すると,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-7} - \frac{1}{4n-3}\right) + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4n+1} \right) \\ &= \frac{n}{4n+1} \end{aligned}$$

である. よって, 求める和は, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$ である.

(2) $|\vec{OB}| = 1$ なので, $a^2 + b^2 = 1$ である. また $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ であるから, $a + b = \frac{\sqrt{6}}{2}$ である. よって,

$$\begin{aligned} ab &= \frac{1}{2} ((a+b)^2 - (a^2 + b^2)) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる. これより, a, b は 2 次方程式 $x^2 - \frac{\sqrt{6}}{2}x + \frac{1}{4} = 0$ の解であることがわかる. これを解くと $x = \frac{\pm\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ となり, $a < b$ なので $\vec{OB} = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)$ となる.

(3) 真数条件より, $-x^2 + 4x - 3 > 0$ なので, 定義域は $1 < x < 3$ である. 導関数は

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\log(-x^2 + 4x - 3))' \frac{1}{\log 10} \\ &= \frac{2x - 4}{\log 10 (x^2 - 4x + 3)} \end{aligned}$$

となる.

(1) 半径 a は、原点から直線 $\sqrt{6}x - \sqrt{2}y = 4$ までの距離であるから、

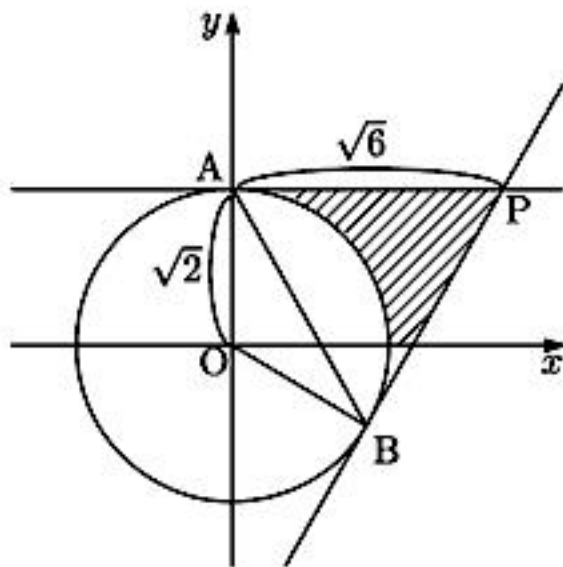
$$a = \frac{4}{\sqrt{6+2}} = \sqrt{2}$$

と求まる。点 $(\sqrt{6}, \sqrt{2})$ から引いた接線の接点を (p, q) とおくと、

$$\begin{cases} p^2 + q^2 = 2 \\ \sqrt{6}p + \sqrt{2}q = 2 \end{cases}$$

である。ここから q を消去すると、 $4p^2 - 2\sqrt{6}p = 0$ がわかるので、これを解いて、 $p = 0, \frac{\sqrt{6}}{2}$ を得る。 $p = \frac{\sqrt{6}}{2}$ のときは $\sqrt{6}x - \sqrt{2}y = 4$ であるから、 $p = 0$ のときを考えて、 $y = \sqrt{2}$ がもう一つの接線である。

(2) $\sqrt{6}x - \sqrt{2}y = 4$ の傾きは $\sqrt{3}$ だから、右の図で $\angle APB$ の大きさは $\frac{\pi}{3}$ と求まる。また、 $PA = PB = \sqrt{6}$ である。求める面積は、(三角形 APB) + (三角形 OAB) - 扇形 OAB で求まるから、



$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$$

である。

$\angle APB$ は直角だから、 $AP = x$ とおくと、 $0 < x < 1$ であり、 $BP = \sqrt{1-x^2}$ となる。
よって、

$$\frac{1}{3AP} + \frac{\sqrt{3}}{BP} = \frac{1}{3x} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-x^2}}$$

となる。最後の式を $f(x)$ とおく。

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{3x^2} + \frac{\sqrt{3}x}{(1-x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{-(1-x^2)^{3/2} + 3\sqrt{3}x^3}{3x^2(1-x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{(\sqrt{3}x - \sqrt{1-x^2})(1+2x^2 + \sqrt{3}x\sqrt{1-x^2})}{3x^2(1-x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

である。ここで、 $1+2x^2 + \sqrt{3}x\sqrt{1-x^2} > 0$ かつ、 $3x^2(1-x^2)^{3/2} > 0$ なので、 $f'(x)$ の符号は $\sqrt{3}x - \sqrt{1-x^2}$ の符号と一致する。従って、 $f'(x) = 0$ となるのが $x = \frac{1}{2}$ のときであることに注意して、以下の増減表を得る。

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって、 $x = \frac{1}{2}$ で $f(x)$ は最小となり、その値は $\frac{8}{3}$ である。

直線 ℓ の方程式は $y = a(p+q)x + 1 - apq$ であり、これは原点を通るので

$$apq = 1 \cdots (*)$$

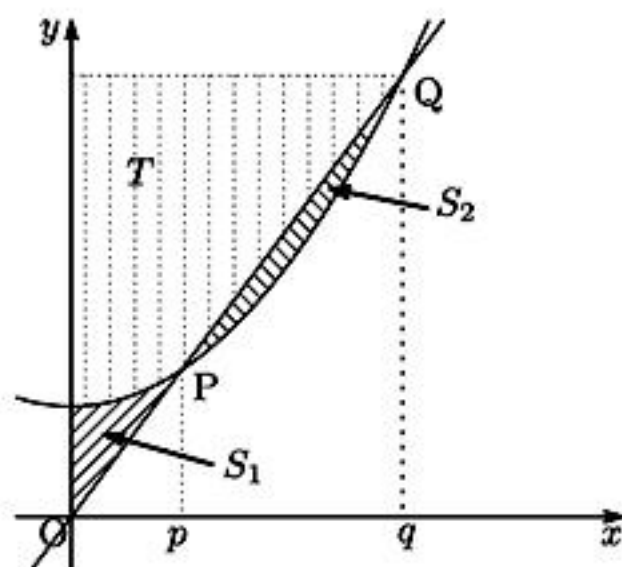
である.

次に、右図の打点部の面積を T とすると、

$$S_1 + T = \frac{1}{2}q(aq^2 + 1)$$

であり、

$$\begin{aligned} S_2 + T &= \int_0^q (aq^2 + 1 - (ax^2 + 1)) dx \\ &= a \left[q^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^q \\ &= \frac{2}{3}aq^3 \end{aligned}$$



である.

これらは等しくなければいけないので、

$$aq^2 = 3 \cdots (**)$$

を得る. (*) および (**) から $q = 3p$ がわかる.

$$S_2 = \frac{4}{9} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_p^{3p} (4apx - (ax^2 + 1)) dx \\ &= -a \int_p^{3p} (x - 3p)(x - p) dx \\ &= \frac{4}{3}ap^3 \end{aligned}$$

から、 $ap^3 = \frac{1}{3}$ である. これと (*) から得られる $3ap^2 = 1$ より、 $p = 1$ がわかり、従って $a = \frac{1}{3}$ である.