

理 学 部 数理・自然情報科学科
 医 学 部 医 学 科
 医 学 部 保 健 学 科

前期日程

平成 18 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. この問題冊子は試験の合図があるまで開いてはいけない。
2. 解答用紙は問題冊子と別になっているので、解答はすべて解答用紙の指定されたところに記入すること。また、解答用紙は問題ごとに別になっているので、注意すること。
3. 受験番号は必ず解答用紙の指定されたところへ記入すること。決して氏名を書いてはいけない。
4. この問題冊子は持ち帰ること。

解答にあたっての注意事項

この問題冊子には、理学部数理・自然情報科学科、医学部医学科、医学部保健学科の問題がある。受験者は下の表にしたがって、志望学部学科の問題を解答すること。

学 部	解 答 す る 問 題
理 学 部 数理・自然 情報科学科	2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 の 6 問
医 学 部 医 学 科	3 , 4 , 5 , 6 , 7 の 5 問
医 学 部 保 健 学 科	1 , 2 , 3 , 4 の 4 問

- 1** a を定数とする。辺の長さが a と $2a$ の長方形の厚紙がある。この厚紙の四隅から同じ大きさの正方形を切り落とし、ふたのない直方体の容器を作る。容積が最大となるとき、切り落した正方形の 1 辺の長さを a を用いて表せ。また、そのときの容積を求めよ。ただし、紙の厚さは容積を求めるときに考慮しないものとする。

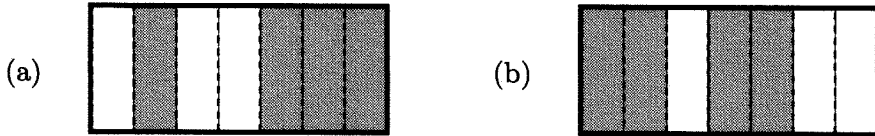
2

a, b を実数とする。方程式 $x^2 + ax + b = |x|$ が相異なる 4 個の実数解をもつような点 (a, b) の存在する領域を図示せよ。

3

連続する n 個の枠を左から順に白と黒に塗り分けたものを、 n 枠のバーコードという。黒く塗った枠の一続きをバーといい、白く塗った枠の一続きをスペースという。

下の図は、2 個のスペースと 2 個のバーからなる 7 枠のバーコードのうち、(a) はスペースで始まる例であり、(b) はバーから始まる例を示している。



- (1) 7 枠のバーコードを考える。このうち、2 個のスペースと 2 個のバーからなるスペースで始まるバーコードの総数を求めよ。
- (2) n 枠のバーコードを考える。 k をうまく選んで、 k 個のスペースと k 個のバーからなるスペースで始まるバーコードの総数が、100 を超えるようにしたい。このことができる最小の n の値を求めよ。また、そのときの k の値を求めよ。

4

次の問いに答えよ。

- (1) α は 1 でない複素数で, $\alpha^3 = 1$ をみたすものとする。

$$(\alpha + 1)^{2006} = p + qi$$

となる実数 p, q の値を求めよ。ただし, i は虚数単位である。

- (2) O を原点とする座標空間内の 2 点 $A(1, 1, 2)$, $B(2, 4, 1)$ を通る直線上に点 P をとる。 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{OP}$ が直交するときの P の座標を求めよ。

- 5** a, b は実数で, a は $0 \leq a \leq 1$ をみたす。このとき次の2つの放物線はただ1つの共有点をもつとする。

$$C_1: y = 1 - x^2$$

$$C_2: y = b - \frac{1}{2}(x + a)^2$$

(1) b を a の式で表せ。

(2) 連立不等式

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ (y + x^2 - 1) \left\{ y + \frac{1}{2}(x + a)^2 - b \right\} \leq 0 \end{cases}$$

の表す領域の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3) a は, 共有点の x 座標が $0 \leq x \leq 1$ の範囲にあるように動くものとする。このとき, $S(a)$ が最小になるときの a の値を求めよ。

6

(1) n を自然数とする。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 \left(x - \frac{1}{n}\right) \tan^2 \left\{ \frac{\pi}{4} \left(x - \frac{1}{n}\right) \right\} dx \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k \tan^2 \frac{\pi k}{4n} \leq \int_0^1 x \tan^2 \frac{\pi x}{4} dx$$

(2) 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k \tan^2 \frac{\pi k}{4n}$$

を求めよ。

7 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は逆行列をもつとする。

(1) A が、性質「逆行列をもつあらゆる行列 X に対して、つねに $AX = XA$ が成り立つ」をもつための必要十分条件を a, b, c, d を用いて表せ。

(2) 0 でない実数 t を用いて $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$ の形で表される行列の全体からなる集合を H とする。 A が、性質「 H に属するあらゆる行列 Y に対して、つねに AYA^{-1} が H に属する」をもつための必要十分条件を a, b, c, d を用いて表せ。