

1.

(1) 漸化式において $n = 1$ とおけば,

$$x(f_2(x) + x + 2) = 3 \int_0^x f_1(t) dt$$

なので, ここに $f_1(x) = x^2 + 1$ を代入して,

$$x(f_2(x) + x + 2) = 3 \int_0^x (t^2 + 1) dt$$

$$x(f_2(x) + x + 2) = 3 \left(\frac{1}{3} x^3 + x \right)$$

$$f_2(x) + x + 2 = x^2 + 3$$

となるので, $f_2(x) = x^2 - x + 1$ を得る.

(2) $n = 1$ のとき, $a_1 = 0$ とおけばよい. $n = k$ ($k \geq 2$) のとき, $f_k(x) = x^2 + a_k x + 1$ であると仮定する. このとき,

$$x(f_{k+1}(x) + x + 2) = 3 \int_0^x f_k(t) dt$$

に $f_k(x) = x^2 + a_k x + 1$ を代入して,

$$x(f_{k+1}(x) + x + 2) = 3 \int_0^x (t^2 + a_k t + 1) dt$$

$$x(f_{k+1}(x) + x + 2) = 3 \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} a_k x^2 + x \right)$$

$$f_{k+1}(x) + x + 2 = x^2 + \frac{3}{2} a_k x + 3$$

$$f_{k+1}(x) = x^2 + \left(\frac{3}{2} a_k - 1 \right) x + 1$$

となる. 従って,

$$a_{k+1} = \frac{3}{2} a_k - 1$$

とおけば, $f_{k+1} = x^2 + a_{k+1}x + 1$ という形で表示できる. 従って $n = k+1$ のときも題意は成立する.

以上より, 題意は示された.

(3)(2) の証明から,

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n - 1$$

であることがわかる. この式を変形すると,

$$a_{n+1} - 2 = \frac{3}{2} (a_n - 2)$$

となる. よって, $\{a_n - 2\}$ という数列は, 初項が $a_1 - 2 = -2$, 公比が $3/2$ の等比数列であり,

$$a_n - 2 = -2 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}$$

が成立する. 以上より,

$$a_n = 2 \left\{ 1 - \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} \right\}$$

である. よって

$$f_n(x) = x^2 + 2 \left\{ 1 - \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} \right\} x + 1$$

Hは直線AB上にあるので、実数 t を用いて、 $\overrightarrow{OH} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$ とおくことができる。OH $\perp$ ABであるので、

$$(t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0$$

である。左辺を展開すれば、

$$-t|\overrightarrow{OA}|^2 - (1-2t)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + (1-t)|\overrightarrow{OB}|^2 = 0$$

となる。ここで、 $|\overrightarrow{OA}| = 1$ 、 $|\overrightarrow{OB}| = x$ 、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x/2$ であることに注意すれば、上の式は、

$$-t - \frac{(1-2t)x}{2} + (1-t)x^2 = 0$$

である。これを解いて、

$$t = \frac{-x + 2x^2}{2(1 - x + x^2)}$$

を得る。従って、

$$\overrightarrow{OH} = \frac{(-x + 2x^2)\overrightarrow{OA} + (2 - x)\overrightarrow{OB}}{2(1 - x + x^2)}$$

である。

(2) $\overrightarrow{OI}$ は、 $\overrightarrow{OH}$ の $\overrightarrow{OA}$ 上への正射影である。従って、内積の関係式

$$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OI}| = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} \quad \cdots (*)$$

が成り立つ。ここで、(1)より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} &= \frac{-x + 2x^2}{2(1 - x + x^2)} + \frac{x(2 - x)}{4(1 - x + x^2)} \\ &= \frac{3x^2}{4(1 - x + x^2)} \end{aligned}$$

であることと、条件より、

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$

であることから、(*)は、

$$\frac{3x^2}{4(1 - x + x^2)} = \frac{1}{2}$$

となる。これを整理すると $x^2 + 2x - 2 = 0$ である。これを解くと、 $x = \pm\sqrt{3} - 1$ を得る。 $x > 0$ なので、 $x = \sqrt{3} - 1$ である。