

1

(1) 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 4, \quad \alpha\beta = k$$

なので

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 16 - 2k$$

(2) 方程式が実数解を持つという条件から,

$$16 - 4k \geq 0 \quad \therefore k \leq 4$$

したがって, (1) より

$$\alpha^2 + \beta^2 = 16 - 2k \geq 8$$

等号が成り立つのは $k = 4$, つまり方程式が $x^2 - 4x + 4 = 0$ のときなので,

$k = 4, \alpha = \beta = 2$ のときに $\alpha^2 + \beta^2$ は最小値 8 をとる.

2

(1) 8点を2つの四角形に分ける分け方は

$$\frac{{}^8C_4}{2} = 35 \text{ [通り]}$$

このうち、2つの四角形が交わらない選び方は4通りなので、交わるような選び方の総数は

$$35 - 4 = 31 \text{ [通り]}$$

(2)

$$|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 19$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{19 - 9 - 4}{-4} = -\frac{3}{2}$$

より、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ がなす角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = -\frac{1}{2} \quad \therefore \theta = \frac{2}{3}\pi$$

(証明)

$$f(f(x)) + mf(x) - n^2 - 2mn - n = x(x+m)\{x^2 + mx + 2(m+n)\} = 0$$

より, 方程式は

$$x = 0, -m, \frac{1}{2}(-m \pm \sqrt{m^2 - 8m - 8n})$$

の4解をもつので, これが全て異なることを示せばよい.

(i) $0 \neq -m$ を示すそもそも m は自然数 $m > 0$ なので, 2解 $-m$ と 0 は相異なることがわかる.(ii) $\frac{1}{2}(-m \pm \sqrt{m^2 - 8m - 8n}) \neq 0, -m$ を示す.まず, $m^2 - 8m - 8n < 0$ のとき, $\frac{1}{2}(-m \pm \sqrt{m^2 - 8m - 8n})$ は虚数解となるので4解は全て異なることが分かる.次に, $m^2 - 8m - 8n \geq 0$ のとき,

$$m^2 - 8m - 8n - m^2 = -8(m+n) < 0$$

$$\therefore m^2 - 8m - 8n < m^2$$

$$\sqrt{m^2 - 8m - 8n} < m$$

$$-m < \pm \sqrt{m^2 - 8m - 8n} < m$$

$$-m < \frac{1}{2}(-m \pm \sqrt{m^2 - 8m - 8n}) < 0$$

したがって, $\frac{1}{2}(-m \pm \sqrt{m^2 - 8m - 8n})$ は 0 にも $-m$ にもなりえない.(iii) $\frac{1}{2}(-m - \sqrt{m^2 - 8m - 8n}) \neq \frac{1}{2}(-m + \sqrt{m^2 - 8m - 8n})$ を示す.

この2解が等しくなる必要十分条件は

$$m^2 - 8m - 8n = (m-4)^2 - 8(n+2) = 0$$

となることである.

ここで, m は奇数なので $(m-4)^2$ は奇数. 一方, $8(n+2)$ は偶数なのでその差が 0 になることはない. このことから, $\frac{1}{2}(-m \pm \sqrt{m^2 - 8m - 8n})$ の2解は異なることがわかる.

(i)~(iii) より, 与えられた方程式は複素数の範囲で相異なる4つの解を持つことが示された.

(1)

$$l_2 : y = -\frac{1}{2a}(x-a) + a^2 = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$$

より、曲線と l_2 との交点の x 座標は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} &= x^2 \\ (x-a)(2ax + 2a^2 + 1) &= 0 \\ \therefore x &= a, -a - \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-a-\frac{1}{2a}}^a \left(-\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} - x^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{6} \left(a + a + \frac{1}{2a} \right)^3 \\ &= \frac{(4a^2 + 1)^3}{48a^3} \end{aligned}$$

(2)

$$S_2 = \left(2a^2 + \frac{1}{2} \right) \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{4a^3 + a}{4}$$

より、

$$\begin{aligned} S_1 &= S_2^3 \\ \frac{(4a^2 + 1)^3}{48a^3} &= \frac{(4a^3 + a)^3}{64} \\ (4 - 3a^6)(4a^2 + 1)^3 &= 0 \end{aligned}$$

ここで、 $4a^2 + 1 > 0$, $a > 0$ より

$$4 - 3a^6 = 0$$

$$\therefore a = \sqrt[6]{\frac{4}{3}}$$

(1) $r = 1$ のとき, $a_n = c$ より,

$$(\text{与式}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{cn}{cn} = 1$$

である. また, $r \neq 1$ を仮定すると

$$(\text{与式}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n cr^{2k}}{\sum_{k=1}^n cr^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{cr^2(1-r^{2n})}{1-r^2}}{\frac{cr(1-r^n)}{1-r}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r(1+r^n)}{1+r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+r^n}{\frac{1}{r}+1}$$

より,

$$(\text{与式}) = \begin{cases} \infty & (r > 1) \\ 1 & (r = 1) \\ \frac{r}{1+r} & (0 < r < 1) \end{cases}$$

(2)

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 2n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

より,

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_{2k}}{\sum_{k=1}^n a_k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2} \right)}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}}{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(1)

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + ax + a > 0$$

より, すべての x について $x^2 + ax + a > 0$ であればよい. したがって

$$x^2 + ax + a = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a > 0$$

$$\therefore -\frac{a^2}{4} + a > 0$$

$$\therefore 0 < a < 4$$

(2) $f(x)$ の値が最大となるのは $x^2 + ax + a$ の値が最小となるときなので

$$p = -\frac{a}{2}$$

(3)

$$f'(x) = -\frac{2x+a}{(x^2+ax+a)^2}, \quad f''(x) = \frac{2(3x^2+3ax+a^2-a)}{(x^2+ax+a)^3}$$

変曲点の x 座標は $f''(x) = 0$ を満たす x なので

$$x = -\frac{1}{2}a \pm \frac{\sqrt{12a-3a^2}}{6}$$

またこのとき,

$$3(x^2 + ax + a) = (3x^2 + 3ax + a^2 - a) - a^2 + 4a$$

$$\therefore x^2 + ax + a = \frac{4a - a^2}{3}$$

なので, 変曲点の座標は

$$\left(-\frac{1}{2}a \pm \frac{\sqrt{12a-3a^2}}{6}, \frac{3}{4a-a^2}\right)$$

(4) $f(p) = \frac{4}{4a-a^2}$ より,

$$\Delta PQR = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{12a-3a^2}}{3} \left(f(p) - \frac{3}{4a-a^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4a-a^2}}$$

ここで, $0 < a < 4$ より $0 < 4a - a^2 \leq 4$ なので

$$\Delta PQR \geq \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} (x - a \sin x - b \cos x)^2 dx &= 2 \int_0^{\pi} (x^2 + a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x - 2ax \sin x) dx \\ &= \pi \left(a^2 + b^2 - 4a + \frac{2}{3} \pi^2 \right) \\ &= \pi \left\{ (a - 2)^2 + b^2 + \frac{2}{3} \pi^2 - 4 \right\}\end{aligned}$$

より, $a = 2, b = 0$ のときに最小値 $\frac{2}{3} \pi^3 - 4\pi$ をとる.