

(1)

$$a_{n+1} = 4a_n - 2^{n+1} \Leftrightarrow a_{n+1} - 2^{n+1} = 4(a_n - 2^n)$$

より, 数列 $\{a_n - 2^n\}$ は初項 2, 公比 4 の等比数列であるから

$$a_n - 2^n = 2 \cdot 4^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 2^{2n-1} + 2^n$$

(2) $x = 2 \sin \theta$ とすると

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{4+x-x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4+2\sin\theta-4\sin^2\theta}{2\sqrt{1-\sin^2\theta}} 2\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2+2\sin\theta+2\cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \end{aligned}$$

2

(1)

$$y = 1 - (a - 1)x$$

より

$$(a + 1)x + (2a - 1)\{1 - (a - 1)x\} = 3$$

$$(4 - 2a)(ax - 1) = 0$$

ここで、この方程式は解を無数に持つので

$$4 - 2a = 0 \quad \therefore a = 2$$

(2) $a = 2$ より, $(*) \Leftrightarrow x + y = 1$ なので

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 1 - 3x + 3x^2 \\ &= 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

より, $x = y = \frac{1}{2}$ のときに最小値 $\frac{1}{4}$ をとる.

余弦定理より

$$1^2 + 6^2 - 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot \cos \angle A = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cos \angle C$$

$$4 \cos \angle C = 3 + \cos \angle A$$

ここで、 $\angle C = 120^\circ - \angle A$ より

$$2(\sqrt{3} \sin \angle A - \cos \angle A) = 3 + \cos \angle A$$

$$12(1 - \cos^2 \angle A) = 9 \cos^2 \angle A + 18 \cos \angle A + 9$$

$$(7 \cos \angle A - 1)(\cos \angle A + 1) = 0$$

$0^\circ < \angle A < 120^\circ$ より

$$\cos \angle A = \frac{1}{7}, \quad \sin \angle A = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

ここで、求める面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \sin \angle A + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \sin \angle C$$

$$= 3 \sin \angle A + 6(\sqrt{3} \cos \angle A + \sin \angle A)$$

$$= 6\sqrt{3}$$

(1) $f(x) = \frac{1}{6}(x^2 + k)$, $g(x) = \log(x + 2)$ とすると,

$$f'(x) = \frac{1}{3}x, \quad g'(x) = \frac{1}{x+2}$$

より, 2 曲線の接線の傾きが等しくなる x 座標は

$$\frac{1}{3}x = \frac{1}{x+2}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x-1)(x+3) = 0$$

$$\therefore x = 1, -3$$

ここで, C_2 における真数条件から $x > -2$ なので $x = -3$ は不適.

したがって, 2 曲線は $x = 1$ での y 座標が一致するので

$$f(1) = g(1)$$

$$\frac{1+k}{6} = \log 3$$

$$\therefore k = 6 \log 3 - 1$$

(2)

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{18} + \frac{kx}{6} - (x+2) \log(x+2) + x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{18} + \frac{k}{6} - 3 \log 3 + 1 + 2 \log 2 \\ &= \frac{8}{9} + 2 \log 2 - 2 \log 3 \end{aligned}$$