

1

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} 10^k = \frac{10^n - 1}{9}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{10^k - 1}{9} \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right) \\ &= \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}\end{aligned}$$

となり, 結論を得る.

2

(1) 成分表示すると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} &= (1, -1, 1) + x(-2, 3, 1) + y(1, 0, -2) \\ &= (-2x + y + 1, 3x - 1, x - 2y + 1)\end{aligned}$$

となる. よって, d^2 は,

$$\begin{aligned}d^2 &= (-2x + y + 1)^2 + (3x - 1)^2 + (x - 2y + 1)^2 \\ &= 14x^2 + 5y^2 - 8xy - 8x - 2y + 3 \\ &= 14x^2 - 8(y + 1)x + 5y^2 - 2y + 3 \\ &= 14 \left\{ x - \frac{2(y + 1)}{7} \right\}^2 + 5y^2 - 2y + 3 - \frac{8y^2 + 16y + 8}{7} \\ &= 14 \left\{ x - \frac{2(y + 1)}{7} \right\}^2 + \frac{1}{7}(27y^2 - 30y + 13)\end{aligned}$$

となるので, y を固定した時の d の最小は, $x = \frac{2(y + 1)}{7}$ である.

(2)(1)において, y を固定した時の d^2 の最小値は,

$$d^2 = \frac{1}{7}(27y^2 - 30y + 13) = \frac{27}{7} \left(y - \frac{5}{9} \right)^2 + \frac{2}{3}$$

となる. ここで, y を動かすと, d の最小値は $\frac{\sqrt{6}}{3}$ となる.

3

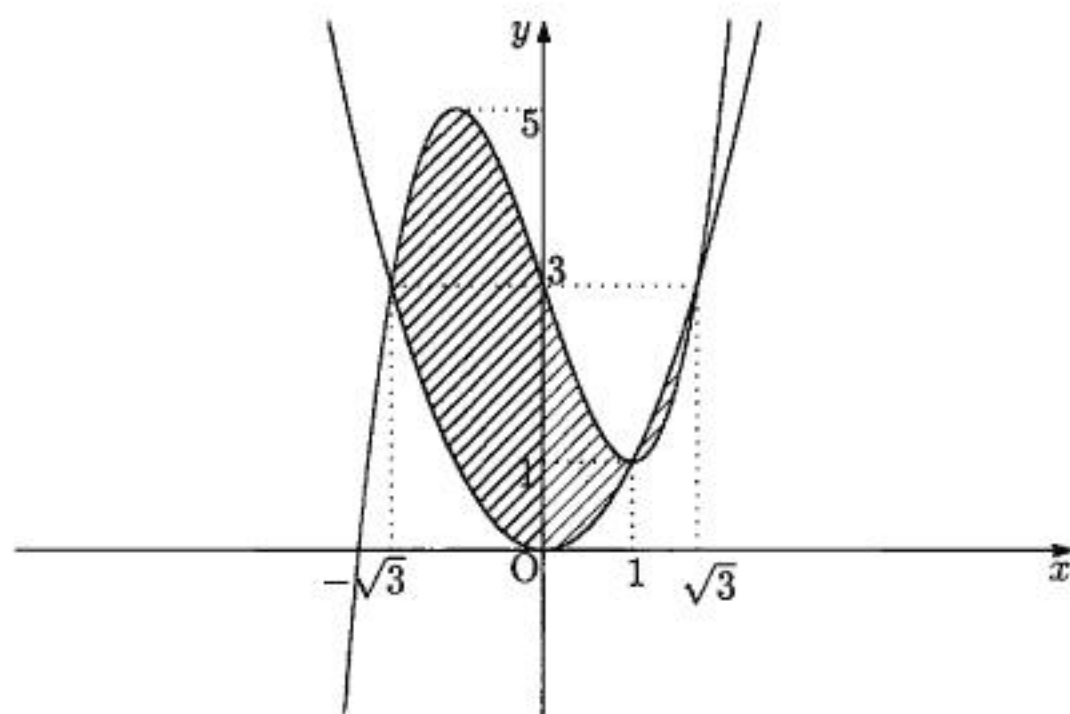
(1) $y = x^3 - 3x + 3$ のグラフを描くために, $f(x) = x^3 - 3x + 3$ を微分して,

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

となる. よって, $f'(x) = 0$ となる x は $x = \pm 1$ である. よって増減表は以下のようになる.

x	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$

また, $y = x^2$ との交点は, $x^2 = x^3 - 3x + 3$ を解いて, $x = 1, \pm\sqrt{3}$ となる. よって, 領域 D は以下のようになる.



(2) $3x + 4y = k$ とおくと, これは傾きが $-\frac{3}{4}$ の直線である. よって, k の最大値の候補は, (1) の図から, $y = x^3 - 3x + 3$ とこの直線が接するときか, $(\sqrt{3}, 3)$ を通るときかの 2 つである.

前者の場合, $f(x) = x^3 - 3x + 3$ とおくと, $f'(x) = 3x^2 - 3 = -\frac{3}{4}$ とならなければならないので, $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる. このうち, (1) の図から $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ を採用できる. このとき, y の値は,

$$y = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3 = \frac{9}{8}\sqrt{3} + 3$$

であるから, このときの k の値は,

$$k = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\left(\frac{9}{8}\sqrt{3} + 3\right) = 12 + 3\sqrt{3}$$

となる. 一方後者の場合も k は同じ値になる. よって, $3x + 4y$ の最大値は $12 + 3\sqrt{3}$ であり, その最大値を与える (x, y) は $(\sqrt{3}, 3)$ と $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{8}\sqrt{3} + 3\right)$ である.

4

(1) $f(x)$ を x で微分して,

$$f'(x) = x^2 - 2(1+a)x + 4a = (x-2)(x-2a)$$

となるので, $f'(x) = 0$ となる x は $x = 2, 2a$ である. よって, $a < 1$ のとき, $f(x)$ の増減は以下のようになる.

x	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって, $f(x)$ は $x = 2$ で極小値

$$f(2) = a^2 + 4a - \frac{4}{3}$$

をとり, $x = 2a$ で極大値

$$f(2a) = -\frac{4}{3}a^3 + 5a^2$$

をとる.

$a = 1$ のときは, $f'(x) = (x-2)^2 \geq 0$ なので, $f(x)$ は単調増加であり, 極値はない.

(2) 問題の「 $x \geq 0$ に対し $f(x) \geq 0$ 」というのは, $x \geq 0$ での $f(x)$ の最小値が 0 以上となるということと同値である.

$a = 1$ のとき $f(x)$ は単調増加なので, $f(0) = a^2 = 1$ が最小値である. これは 0 以上なので, $a = 1$ は問題に適する.

$a < 1$ のとき, $f(x)$ は $x = 2$ で極小値 $f(2) = a^2 + 4a - \frac{4}{3}$ をとる. これと $f(0) = a^2$ のうち小さい方が最小値である. $f(2) - f(0) = 4a - \frac{4}{3}$ であることに注意すると, 以下のように場合分けできる.

1. $a \geq \frac{1}{3}$ のとき. $f(2) \geq f(0)$ なので, $f(0)$ が最小値であり, これは常に 0 以上である.

2. $a < \frac{1}{3}$ のとき. $f(2) \leq f(0)$ なので, $f(2)$ が最小値である. これが 0 以上となるのは,

$$a^2 + 4a - \frac{4}{3} \geq 0$$

より, $a \leq -\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2$, $\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2 \leq a$ を得る.

以上より, 求める範囲は $a \leq -\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2$, $\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2 \leq a \leq 1$ である.