

1

$$d = |\overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}|$$

とおく. 成分表示すると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} &= (1, -1, 1) + x(-2, 3, 1) + y(1, 0, -2) \\ &= (-2x + y + 1, 3x - 1, x - 2y + 1)\end{aligned}$$

となる. よって, d^2 は,

$$\begin{aligned}d^2 &= (-2x + y + 1)^2 + (3x - 1)^2 + (x - 2y + 1)^2 \\ &= 14x^2 + 5y^2 - 8xy - 8x - 2y + 3 \\ &= 14x^2 - 8(y + 1)x + 5y^2 - 2y + 3 \\ &= 14 \left\{ x - \frac{2(y + 1)}{7} \right\}^2 + 5y^2 - 2y + 3 - \frac{8y^2 + 16y + 8}{7} \\ &= 14 \left\{ x - \frac{2(y + 1)}{7} \right\}^2 + \frac{27}{7} \left(y - \frac{5}{9} \right)^2 + \frac{2}{3}\end{aligned}$$

となるので, $x - \frac{2(y + 1)}{7} = 0$, $y - \frac{5}{9} = 0$ のとき d^2 は最小値 $\frac{2}{3}$ をとる.

よって, $x = \frac{4}{9}$, $y = \frac{5}{9}$ のとき d は最小値 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ をとる.

2

(1) $f(x)$ を x で微分して,

$$f'(x) = x^2 - 2(1+a)x + 4a = (x-2)(x-2a)$$

となるので, $f'(x) = 0$ となる x は $x = 2, 2a$ である. よって, $a < 1$ のとき, $f(x)$ の増減は以下のようになる.

x	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって, $f(x)$ は $x = 2$ で極小値

$$f(2) = a^2 + 4a - \frac{4}{3}$$

をとり, $x = 2a$ で極大値

$$f(2a) = -\frac{4}{3}a^3 + 5a^2$$

をとる.

$a = 1$ のときは, $f'(x) = (x-2)^2 \geq 0$ なので, $f(x)$ は単調増加であり, 極値はない.

(2) 問題の「 $x \geq 0$ に対し $f(x) \geq 0$ 」というのは, $x \geq 0$ での $f(x)$ の最小値が 0 以上となるということと同値である.

$a = 1$ のとき $f(x)$ は単調増加なので, $f(0) = a^2 = 1$ が最小値である. これは 0 以上なので, $a = 1$ は問題に適する.

$a < 1$ のとき, $f(x)$ は $x = 2$ で極小値 $f(2) = a^2 + 4a - \frac{4}{3}$ をとる. これと $f(0) = a^2$ のうち小さい方が最小値である. $f(2) - f(0) = 4a - \frac{4}{3}$ であることに注意すると, 以下のように場合分けできる.

1. $a \geq \frac{1}{3}$ のとき. $f(2) \geq f(0)$ なので, $f(0)$ が最小値であり, これは常に 0 以上である.

2. $a < \frac{1}{3}$ のとき. $f(2) \leq f(0)$ なので, $f(2)$ が最小値である. これが 0 以上となるのは,

$$a^2 + 4a - \frac{4}{3} \geq 0$$

$$\text{より, } a \leq -\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2, \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2 \leq a \text{ を得る.}$$

以上より, 求める範囲は, $a \leq -\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2, \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2 \leq a \leq 1$ である.