

1

(1) 3つの関係式をすべて足し合わせると,

$$\begin{aligned} a_n + b_n + c_n &= \frac{1}{2}(b_{n-1} + c_{n-1}) + \frac{1}{2}(c_{n-1} + a_{n-1}) + \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) \\ &= a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} \end{aligned}$$

であるので, $a_n + b_n + c_n = a_1 + b_1 + c_1 = a + b + c$ となる.

また

$$\begin{aligned} 2a_n - b_n - c_n &= (b_{n-1} + c_{n-1}) - \frac{1}{2}(c_{n-1} + a_{n-1}) - \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) \\ &= -\frac{1}{2}(2a_{n-1} - b_{n-1} - c_{n-1}) \end{aligned}$$

であるので, $\{2a_n - b_n - c_n\}$ は初項 $2a_1 - b_1 - c_1 = -\frac{1}{2}(2a - b - c)$, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列なので, 結論を得る.

(2)(1) で得られた 2つの式を足し合わせて, 両辺を $\frac{1}{3}$ 倍すると,

$$a_n = \frac{a + b + c}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (2a - b - c)$$

となる. よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{a + b + c}{3}$ を得る.

2

(1) $f(x) = \sqrt{x} - \log(x+1)$ とおく. これを x で微分して,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x+1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(x+1)} > 0$$

なので, $f(x)$ は $x > 0$ で増加関数であり, $f(0) = 0$ なので, $x > 0$ ならば $f(x) > 0$ である. よって, 結論を得る. このとき,

$$0 < \frac{1}{n} \log(n+1) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

である. ここで, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ であるから, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(n+1) = 0$$

である.

(2) $1 - \sqrt{x} = t$ なので, $x = (t-1)^2$ である. よって, $\frac{dx}{dt} = 2(t-1)$ となることに注意すると,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^n dx &= \int_1^0 2t^n(t-1) dt \\ &= -2 \int_0^1 (t^{n+1} - t^n) dt \\ &= -2 \left[\frac{1}{n+2} t^{n+2} - \frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

を得る.

(3)(1) の結果から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \log(n+1)} = 1$$

がわかる. これを用いると, 求める極限值は,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{(n+1)(n+2)} \right)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{1}{(n/2+1)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n/2}}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である.