

1

(a)より、 $f(x)$ は a, b を用いて

$$\begin{aligned}f(x) &= (ax+b)(x^2-x-2) \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 - (2a+b)x - 2b\end{aligned}$$

とおくことができる。ここで(b)より

$$f'(x) = 3ax^2 + 2(b-a)x - 2a - b$$

$$\therefore f'(1) = -a + b = -3 \quad \cdots (1)$$

が得られる。また(c)より

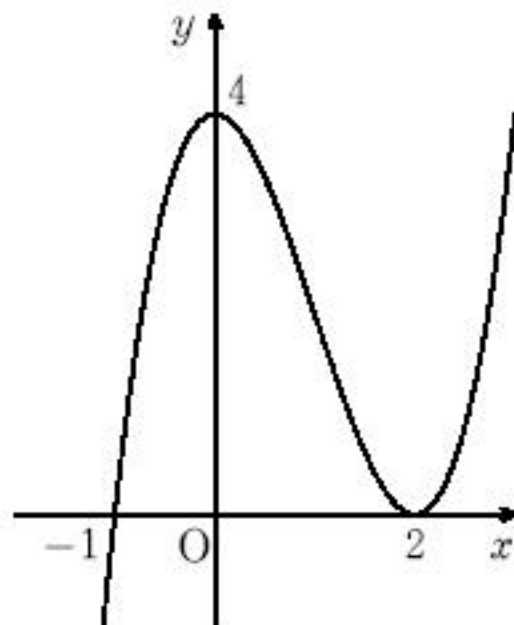
$$\int_0^2 (ax+b)dx = 2a + 2b = -2 \quad \cdots (2)$$

したがって、(1), (2)を連立させて

$$a = 1, b = -2$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= (x-2)(x^2-x-2) \\ &= (x+1)(x-2)^2\end{aligned}$$

ここで $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる。



3点 A, B, P の座標はそれぞれ

$$A(a, a^2), B(b, b^2), P(p, p^2)$$

なので、三角形 ABP の面積 $S(p)$ は

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{1}{2} |(a-p)(b^2-p^2) - (b-p)(a^2-p^2)| \\ &= \frac{1}{2} (b-a)(p-a)(b-p) \\ &= \frac{1}{2} (a-b) \left\{ \left(p - \frac{a+b}{2} \right)^2 - \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

で表されるので、 $p = \frac{a+b}{2}$ のときに最大値 $\left(\frac{b-a}{2} \right)^3$ をとる。

(1) 取り出した 7 個の玉のうち、赤玉が k 個含まれる確率を $P(k)$ と書くこととすると

$$P(k) = \frac{{}_8C_k \cdot {}_4C_{7-k}}{{}_{12}C_7}$$

になるので、ここで求める確率は

$$P(3) = \frac{{}_8C_3 \cdot {}_4C_4}}{{}_{12}C_7} = \frac{7}{99}$$

(2)

$$P(5) = \frac{{}_8C_5 \cdot {}_4C_2}}{{}_{12}C_7} = \frac{14}{33}, \quad P(6) = \frac{{}_8C_6 \cdot {}_4C_1}}{{}_{12}C_7} = \frac{14}{99}, \quad P(7) = \frac{{}_8C_7 \cdot {}_4C_0}}{{}_{12}C_7} = \frac{1}{99}$$

より、求める確率は

$$P(5) + P(6) + P(7) = \frac{57}{99} = \frac{19}{33}$$

(3)

$$P(4) = 1 - (P(3) + P(5) + P(6) + P(7)) = \frac{35}{99}$$

より赤玉の個数の期待値は

$$3 \cdot \frac{7}{99} + 4 \cdot \frac{35}{99} + 5 \cdot \frac{42}{99} + 6 \cdot \frac{14}{99} + 7 \cdot \frac{1}{99} = \frac{14}{3}$$

4

(1)

$$\begin{cases} S_1 = \frac{3}{2}r^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 \\ S_{n+1} = \frac{1}{4}S_n \end{cases}, \quad \begin{cases} T_1 = \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}r^2 \\ T_{n+1} = \frac{1}{4}T_n \end{cases}$$

より

$$S_n = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4^n}, \quad T_n = \frac{\pi r^2}{4^n}$$

(2) (1) より

$$U_n = \frac{(3\sqrt{3} - \pi)r^2}{4^n}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n U_k = (3\sqrt{3} - \pi)r^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} = \frac{(3\sqrt{3} - \pi)r^2}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\}$$

求める行列 P を $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とすると、点 C が移動しないことから

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore p = 1, r = 0$$

このとき、 A', B' は

$$A' : \begin{pmatrix} aq \\ as \end{pmatrix}, \quad B' : \begin{pmatrix} bq \\ bs \end{pmatrix}$$

となるので、三角形 $A'B'C$ が正三角形となる条件は

$$\begin{cases} (aq - 1)^2 + (as)^2 = (bq - 1)^2 + (bs)^2 \\ (aq - 1)^2 + (as)^2 = (bq - aq)^2 + (bs - as)^2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{2(a^2 + b^2 - ab)} \begin{pmatrix} a + b \\ \pm \sqrt{3}(b - a) \end{pmatrix}$$

以上より、求める行列 P は

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a+b}{2(a^2+b^2-ab)} \\ 0 & \pm \frac{\sqrt{3}(b-a)}{2(a^2+b^2-ab)} \end{pmatrix}$$

(1) $(\log x)' = \frac{1}{x}$ より、接線の式は

$$y = \frac{x}{u} - 1 + \log u$$

となるので、

$$S_1(u) = \int_1^u \left(\frac{x}{u} - 1 + \log u - \log x \right) dx = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2u} - \log u$$

また、

$$S_2(u) = \int_1^u \log x dx - \frac{1}{2}(u-1)\log u = \frac{u+1}{2}\log u - u + 1$$

より

$$S(u) = S_1(u) - S_2(u) = \frac{1}{2}(3u - (3+u)\log u) - \frac{1}{2u} - 1$$

(2)

$$\begin{aligned} S'(u) &= \frac{1}{2u^2} - \frac{3}{2u} - \frac{\log u}{2} + 1 \\ \therefore S''(u) &= -\frac{u^2 - 3u + 2}{2u^3} \end{aligned}$$

より、 $S''(u) = 0 \Leftrightarrow u = 2$ なので求める変曲点は

$$\left(2, \frac{7 - 10 \log 2}{4} \right)$$

(3) (2) より

$$S'(2) = \frac{1}{8}(3 - 4 \log 2), \quad S(2) = \frac{1}{4}(7 - 10 \log 2)$$

ここで $e > 2.7$ より $e^3 > 2.7^3 = 19.683$ であるから

$$3 = \log e^3 > \log 19.683 > \log 16 = 4 \log 2 \quad \therefore S'(2) > 0$$

同様に $e^7 > 2.7^7 = 1046.0353203$ なので

$$7 = \log e^7 > \log 1046.0353203 > \log 1024 = 10 \log 2 \quad \therefore S(2) > 0$$

以上を纏めて

$$\begin{cases} S''(u) < 0 & (\forall u > 2) \\ S'(2) > 0, \lim_{u \rightarrow \infty} S(u) = -\infty \end{cases}$$

より関数 $S(u)$ は $u > 2$ の範囲に極大値 $S(u)$ をただ 1 つもち、その値は $S(u) > S(2) > 0$ より正である。

接点 P の座標を $P(p, \sqrt{1-p^2/4})$ とすると接線 l の式は

$$y = -\frac{p}{2\sqrt{4-p^2}}(x-p) + \frac{\sqrt{4-p^2}}{2}$$

となるので、Q, R の座標と線分 QR の長さは

$$Q\left(\frac{4}{p}, 0\right), \quad R\left(0, \frac{2}{\sqrt{4-p^2}}\right)$$

$$|QR|^2 = \frac{16}{p^2} + \frac{4}{4-p^2} = \frac{4(3p^2-16)}{p^2(p^2-4)}$$

である。

ここで $0 < t < 4$ で定義される関数 $f(t) = \frac{4(3t-16)}{t(t-4)}$

を考えると、 $f'(t) = -\frac{4(t-8)(3t-8)}{t^2(t-4)^2}$ より増減表は右のようになる。

t	(0)	...	$\frac{8}{3}$	...	(4)
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		$\searrow$	9	$\nearrow$	

増減表から $f(t)$ は $t = \frac{8}{3}$ で最小値 9 を取るので、線分 QR の長さ $\sqrt{f(p^2)}$ は点 P が $P\left(\sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ にあるとき最小値 3 を取ることがわかる。