

1

(1) (証明)

$$\begin{aligned}
 \sin 20^\circ + \sin 40^\circ &= \sin 20^\circ (1 + 2 \cos 20^\circ) \\
 &= 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ (3 - 4 \sin^2 10^\circ) \\
 &= \cos 10^\circ \cdot 2(3 \sin 10^\circ - 4 \sin^3 10^\circ) \\
 &= \sin 80^\circ \cdot 2 \sin 30^\circ \\
 &= \sin 80^\circ
 \end{aligned}$$

Q.E.D.

(2) 余弦定理より

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{|AP|^2 + |BP|^2 - |AB|^2}{2|AP||BP|} \\
 &= \frac{2(p^2 - 4p + 20) - 16}{2(p^2 - 4p + 20)} \\
 &= 1 - \frac{8}{(p-2)^2 + 16} \geq \frac{1}{2} \quad (\text{等号成立は } p=2 \text{ のとき})
 \end{aligned}$$

ここで $0 \leq \theta \leq \pi$ より

$$\theta \text{ が最大} \Leftrightarrow \cos \theta \text{ が最小} \Leftrightarrow (p-2)^2 + 16 \text{ が最小}$$

が成り立つので、 $p=2$ のときに最大値 $\frac{\pi}{3}$ を取る。

(3) (証明)

$\log_6 12 = \frac{q}{p}$ ($p \neq 0$ で p, q は互いに素) と仮定する。

$$\begin{aligned}
 \log_6 12 &= \frac{q}{p} \\
 12 &= 6^{q/p} \\
 2^{2p} \cdot 3^p &= 2^q \cdot 3^q \\
 2^{2p-q} &= 3^{q-p}
 \end{aligned}$$

ここで 2 と 3 は互いに素なので、この統合が成立するための必要十分条件は

$$\begin{cases} 2p - q = 0 \\ q - p = 0 \end{cases}$$

$$\therefore p = q = 0$$

となる。これは最初に立てた仮定に矛盾するため、仮定が誤まっている、つまり $\log_6 12$ が有理数でないことが示された。

Q.E.D.

[2]

$y = x + \sqrt{a - bx^2}$ より, x は $a - bx^2 > 0$ の範囲に限られる.
 よって, $y = f(x)$ とおき, 微分して増減を調べる.

$$f'(x) = 1 - \frac{bx}{\sqrt{a - bx^2}} \quad \left(-\sqrt{\frac{a}{b}} < x < \sqrt{\frac{a}{b}} \right)$$

$$\frac{bx}{\sqrt{a - bx^2}} = 1 \text{ のとき, } b^2 x^2 = a - bx^2$$

$$b(b+1)x^2 = a$$

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{b(b+1)}}$$

ところで, $x < 0$ において

$$f'(x) = \frac{\sqrt{a - bx^2} - bx}{\sqrt{a - bx^2}} > 0 \quad (\sqrt{a - bx^2} > 0) \text{ より}$$

増減は以下の通り

x	$-\sqrt{\frac{a}{b}}$		0		$\sqrt{\frac{a}{b(b+1)}}$		$\sqrt{\frac{a}{b}}$
$f'(x)$		+	1	+	0	-	0
$f(x)$	$-\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\nearrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$

$$a > 0, b > 0 \text{ より 最大値 } f\left(\sqrt{\frac{a}{b(b+1)}}$$

$$\text{最小値 } f\left(-\sqrt{\frac{a}{b}}\right) = -\sqrt{3}$$

を満たす.

$$-\sqrt{\frac{a}{b}} = -\sqrt{3} \quad \therefore a = 3b$$

$$f\left(\sqrt{\frac{a}{b(b+1)}}$$

①より,

$$\sqrt{\frac{3b(b+1)}{b}} = \sqrt{3(b+1)} = 2 \quad \therefore b = \frac{1}{3}$$

$$\therefore (a, b) = \left(1, \frac{1}{3}\right) \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(1) 直線 l は線分 PQ の中点 $\left(\frac{t}{2}, \frac{\cos 2t + 1}{2}\right)$ を通る傾き $\frac{t}{1 - \cos 2t}$ の直線なので

$$l : y = \frac{t}{1 - \cos 2t} \left(x - \frac{t}{2}\right) + \frac{\cos 2t + 1}{2}$$

ここで点 R は直線 l 上にあり、 x 座標は 0 なのでその y 座標は

$$\begin{aligned} y &= \frac{t}{1 - \cos 2t} \left(-\frac{t}{2}\right) + \frac{\cos 2t + 1}{2} \\ &= \frac{t^2 - \sin^2 2t}{2(\cos 2t - 1)} \end{aligned}$$

(2) 円 C は点 P で曲線 K と同じ接線を持つので、点 P における法線は y 軸となる。また、P, Q を通るので中心は直線 l 上にある。

以上のことから、円 C の中心は点 R であることがわかるので

$$\begin{aligned} r = 1 - y &= 1 - \frac{t^2 - \sin^2 2t}{2(\cos 2t - 1)} \\ &= 1 - \frac{4 \sin^2 t \cos^2 t - t^2}{4 \sin^2 t} \\ &= \sin^2 t + \frac{t^2}{4 \sin^2 t} \\ &\rightarrow \frac{1}{4} \quad (t \rightarrow 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(a) &= \int_0^2 |x^2 - 2x + a| dx \\
&= 2 \int_0^1 |(x-1)^2 + a - 1| dx \\
&= 2 \int_0^{1-\sqrt{1-a}} \{(x-1)^2 + a - 1\} dx - 2 \int_{1-\sqrt{1-a}}^1 \{(x-1)^2 + a - 1\} dx \\
&= \frac{6a - 4 - 8\sqrt{1-a}^3}{3}
\end{aligned}$$

より、 $S'(a) = 0$ とすると

$$S'(a) = 2 - 4\sqrt{1-a} = 0$$

$$\therefore a = \frac{3}{4}$$

以上より $S(a)$ の増減は右表のようになるので、
 $S(a)$ を最小とする a は

$$a = \frac{3}{4}$$

a	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	$S(\frac{3}{4})$	$\nearrow$	