

$$(1) \quad 3\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{AP} + 2(-\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB}) \\ + (-\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC}) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AP} \quad (k \in \mathbb{R}) \text{ とおくと,}$$

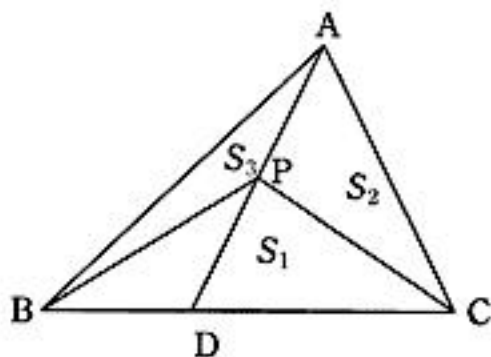
$$\overrightarrow{AD} = \frac{k}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{6}\overrightarrow{AC}$$

$$D \text{ は } BC \text{ 上の点なので } \frac{k}{3} + \frac{k}{6} = 1 \quad \therefore k = 2$$

$$\text{よって, } \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{このとき, } BD:DC = 1:2$$

.....(答)



$$(2) \quad AP:PD = 1:1, BD:DC = 1:2 \text{ より, } \triangle ABC \text{ の面積を } S \text{ とおくと,}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}S$$

$$S_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times S$$

$$= \frac{1}{3}S$$

$$S_3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times S$$

$$= \frac{1}{6}S$$

よって,

$$S_1:S_2:S_3 = \frac{1}{2}S:\frac{1}{3}S:\frac{1}{6}S$$

$$= 3:2:1$$

.....(答)

(1)

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{9-4x}\right) - 1 = \frac{4x^2 - 12x + 9}{x(9-4x)}$$

$$= \frac{(2x-3)^2}{x(9-4x)}$$

ここで、 $0 < x < \frac{9}{4}$ より、 $x(9-4x) > 0$ 、 $(2x-3)^2 \geq 0$

よって、

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{9-4x}\right) - 1 \geq 0$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{9-4x} \geq 1$$

……(答)

(2)

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{9-4x}\right) - k = \frac{4kx^2 - (9k+2)x + 9}{x(9-4x)}$$

$$f(x) = 4kx^2 - (9k+2)x + 9$$

$$= 4k \left(x - \frac{9k+2}{8k} \right)^2 - \frac{(9k+2)^2}{16k} + 9$$

とおき、 $f(x) \geq 0$ を満たす k の最大値を求める。

$$f(0) = 9 > 0, f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{9}{2} > 0$$

より、 $k \leq 0$ のときは常に $f(x) > 0$ なので $k > 0$ としてよい。

(i) $0 < \frac{9k+2}{8k} < \frac{9}{4}$ すなわち $k > \frac{2}{9}$ ……① のとき

$$-\frac{(9k+2)^2}{16k} + 9 \geq 0$$

$\iff 81k^2 - 108k + 4 \leq 0$ を満たす k の値の範囲は

$$\frac{6-4\sqrt{2}}{9} \leq k \leq \frac{6+4\sqrt{2}}{9}$$

よって、①より $\frac{2}{9} < k \leq \frac{6+4\sqrt{2}}{9}$

(ii) $\frac{8k+2}{8k} \geq \frac{9}{4}$ すなわち $0 < k \leq \frac{2}{9}$ のとき常に成り立つ。

(i), (ii) より k の最大値は $\frac{6+4\sqrt{2}}{9}$

……(答)

(1) ①より

$$x^2 - 2(\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta)x + (\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta)^2 + 4 \sin^2 \theta - 2 = 0$$

の判別式を D とおくと, $D/4 = 2 - 4 \sin^2 \theta \geq 0$

つまり $1 - 2 \sin^2 \theta = \cos 2\theta \geq 0$ を満たす.

$0^\circ \leq 2\theta < 360^\circ$ より

$$0^\circ \leq 2\theta < 90^\circ, 270^\circ \leq 2\theta < 360^\circ$$

よって, $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ, 135^\circ \leq \theta < 180^\circ$

……(答)

(2) ①の解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 2(\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta)$$

$$\alpha\beta = (\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta)^2 + 4 \sin^2 \theta - 2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= 4(\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta)^2$$

$$- 2(\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta)^2 - 8 \sin^2 \theta + 4$$

$$= 2 \cos^2 \theta - 4\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta - 2 \sin^2 \theta + 4$$

$$= 2 \cos 2\theta - 2\sqrt{3} \sin 2\theta + 4$$

$$= 4 \cos(2\theta + 60^\circ) + 4$$

θ は (1) の範囲を動くので,

$$60^\circ \leq 2\theta + 60^\circ \leq 150^\circ, 330^\circ \leq 2\theta + 60^\circ \leq 420^\circ$$

よって,

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos(2\theta + 60^\circ) \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < \cos(2\theta + 60^\circ) \leq 1$$

ゆえに

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 \text{ の最大値} & \cdots \cdots 8 \\ \alpha^2 + \beta^2 \text{ の最小値} & \cdots \cdots 4 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

……(答)

(1) C_1 の接線の方程式は接点の x 座標を $x=s$ とおくと,

$$y = 4sx - 2s^2 + a$$

C_2 の接線の方程式は接点の x 座標を $x=t$ とおくと,

$$y = -2tx + t^2 - 1$$

これらが一致するとき, $4s = -2t, -2s^2 + a = t^2 - 1$

$$\text{よって, } (s, t) = \left(\pm \sqrt{\frac{a+1}{6}}, \mp \sqrt{\frac{2(a+1)}{3}} \right)$$

よって, 共通接線の方程式は

$$y = \pm \sqrt{\frac{8(a+1)}{3}} x + \frac{2}{3} a - \frac{1}{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) y 軸について対称なので, $x \geq 0$ について考える.

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{2} &= \int_0^{\sqrt{\frac{a+1}{6}}} \left\{ (2x^2 + a) - \left(\sqrt{\frac{8(a+1)}{3}} x + \frac{2}{3} a - \frac{1}{3} \right) \right\} dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^3 - \sqrt{\frac{2(a+1)}{3}} x^2 + \left(\frac{1}{3} a + \frac{1}{3} \right) x \right]_0^{\sqrt{\frac{a+1}{6}}} \\ &= \frac{a+1}{9} \sqrt{\frac{a+1}{6}} \\ \frac{S_2}{2} &= \int_0^{\sqrt{\frac{2(a+1)}{3}}} \left\{ (-x^2 - 1) - \left(-\sqrt{\frac{8(a+1)}{3}} x + \frac{2}{3} a - \frac{1}{3} \right) \right\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3} x^3 - \sqrt{\frac{2(a+1)}{3}} x^2 - \left(\frac{2}{3} a + \frac{2}{3} \right) x \right]_0^{\sqrt{\frac{2(a+1)}{3}}} \\ &= \frac{2(a+1)}{9} \sqrt{\frac{2(a+1)}{3}} \end{aligned}$$

よって,

$$S_1 : S_2 = 1 : 4 \quad \dots\dots(\text{答})$$