

$$(1) \quad 3\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$$

$$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{AP} + 2(-\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB}) + (-\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC}) = 0 \quad A$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

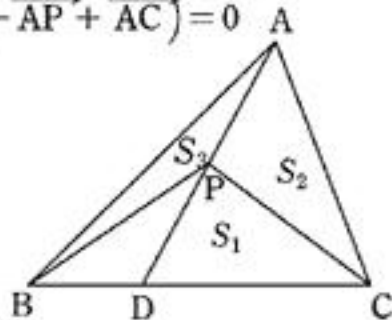
$\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AP} \quad (k \in \mathbb{R})$ とおくと,

$$\overrightarrow{AD} = \frac{k}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{6}\overrightarrow{AC}$$

D は BC 上の点なので $\frac{k}{3} + \frac{k}{6} = 1 \quad \therefore k = 2$

$$\text{よって, } \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

このとき, $BD : DC = 1 : 2$ (答)



(2) $AP : PD = 1 : 1$, $BD : DC = 1 : 2$ より, $\triangle ABC$ の面積を S とおくと,

$$S_1 = \frac{1}{2}S$$

$$S_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times S = \frac{1}{3}S$$

$$S_3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times S = \frac{1}{6}S$$

よって,

$$\begin{aligned} S_1 : S_2 : S_3 &= \frac{1}{2}S : \frac{1}{3}S : \frac{1}{6}S \\ &= 3 : 2 : 1 \end{aligned}$$

.....(答)

- (1) $A(a, ma^2)$, $B(b, mb^2)$ とおく. ($a > 0$, $a > b$ とする)

A における接線の方程式は

$$y = 2max - ma^2 \quad \dots\dots ①$$

B における接線の方程式は

$$y = 2mbx - mb^2 \quad \dots\dots ②$$

交点 P の x 座標は

$$2max - ma^2 = 2mbx - mb^2$$

$$2m(a-b)x = m(a^2 - b^2)$$

$m \neq 0$, $a-b \neq 0$ より

$$x = \frac{a+b}{2}$$

直線 AB の方程式は

$$y - mb^2 = \frac{ma^2 - mb^2}{a-b}(x-b)$$

$$\therefore y = m(a+b)x - mab$$

$$S_1 = \int_b^a \{m(a+b)x - mab - mx^2\} dx$$

$$= \frac{m}{6}(a-b)^3 \quad (\because a > b \text{ より}) \dots\dots ③$$

C と 2 本の接線によって囲まれた図形を S_3 とする.

$$S_3 = \int_b^{\frac{a+b}{2}} \{mx^2 - (2mbx - mb^2)\} dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^a \{mx^2 - (2max - ma^2)\} dx$$

$$= \int_b^{\frac{a+b}{2}} m(x-b)^2 dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^a m(x-a)^2 dx$$

$$= m \left\{ \left[\frac{(x-b)^3}{3} \right]_b^{\frac{a+b}{2}} + \left[\frac{(x-a)^3}{3} \right]_{\frac{a+b}{2}}^a \right\}$$

$$= \frac{m}{12}(a-b)^3$$

よって

$$S_2 = S_1 + S_3$$

$$= \frac{m}{6}(a-b)^3 + \frac{m}{12}(a-b)^3$$

$$= \frac{m}{4}(a-b)^3$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } S_1 : S_3 &= \frac{m}{6}(a-b)^3 : \frac{m}{4}(a-b)^3 \\ &= 2 : 3 \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

- (2) 2 本の接線は直交するので, ①, ②より

$$2ma \cdot 2mb = -1$$

$$a \neq 0 \text{ より } b = -\frac{1}{4am^2}$$

これを③に代入する.

$$S_1 = \frac{m}{6} \left(a + \frac{1}{4am^2} \right)^3$$

$a > 0$, $\frac{1}{4am^2} > 0$ より相加・相乗平均の大小関係に当てはめて

$$a + \frac{1}{4am^2} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{4am^2}} = \frac{1}{m} \quad (\because m > 0)$$

等号が成立するのは

$$a = \frac{1}{4am^2} \text{ のとき}$$

$$\text{すなわち } a = \frac{1}{2m} \text{ のとき}$$

よって, S_1 の最小値は

$$\frac{m}{6} \left(\frac{1}{m} \right)^3 = \frac{1}{6m^2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

