

$$(1) \quad f'(x) = (a^2 - a^3x)e^{-ax}$$

$$f''(x) = (a^4x - 2a^3)e^{-ax}$$

よって、増減表は以下のとおり。

x	...	$\frac{1}{a}$	...	$\frac{2}{a}$	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↘

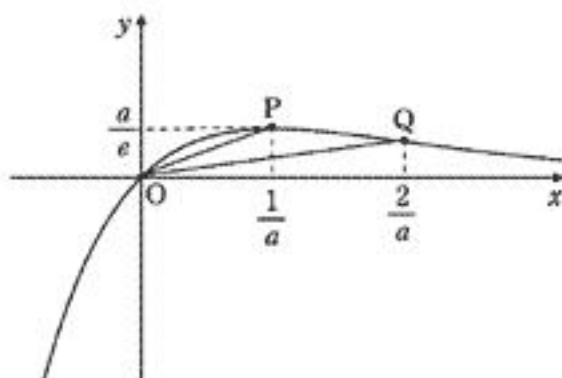
$x = \frac{1}{a}$ のとき、 $f(x)$ は極大値をとる。

このとき、極大値は

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{a}{e}$$

また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ より、

$f(x)$ のグラフの概形は右の通り。



$$(2) \text{ 変曲点は } \left(\frac{2}{a}, \frac{2a}{e^2}\right)$$

ここで、

$$\int a^2 x e^{-ax} dx = -ax e^{-ax} + \int a e^{-ax} dx$$

$$= -(ax+1)e^{-ax}$$

よって、求める面積を S とおくと、

$$S = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2}{a}} a^2 x e^{-ax} dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{e} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{2a}{e^2}$$

$$= \left[-(ax+1)e^{-ax} \right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{2}{a}} + \frac{1}{2e} - \frac{2}{e^2}$$

$$= \frac{5}{2e} - \frac{5}{e^2}$$

.....(答)

(1) 2式から y を消去して, $\alpha^2 \beta x^4 = x$

$$x \geq 0 \text{ より } x=0, \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^2 \beta}}$$

よって, 求める面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^2 \beta}}} \left(\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \alpha x^2 \right) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} \sqrt{\frac{x^3}{\beta}} - \frac{\alpha}{3} x^3 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^2 \beta}}} \\ &= \frac{1}{3\alpha\beta} \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) 点 P の座標を (x', y') とおくと,

$$x' = \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^2 \beta}}, y' = \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha \beta^2}}$$

$$\text{このとき, } x'y' = \frac{1}{\alpha\beta} = 3k$$

$$\alpha > 0, \beta > 0 \text{ より } x' > 0, y' > 0$$

よって, P の軌跡は

$$xy = 3k \quad (x > 0, y > 0)$$

これを図示すると右の通り.

