

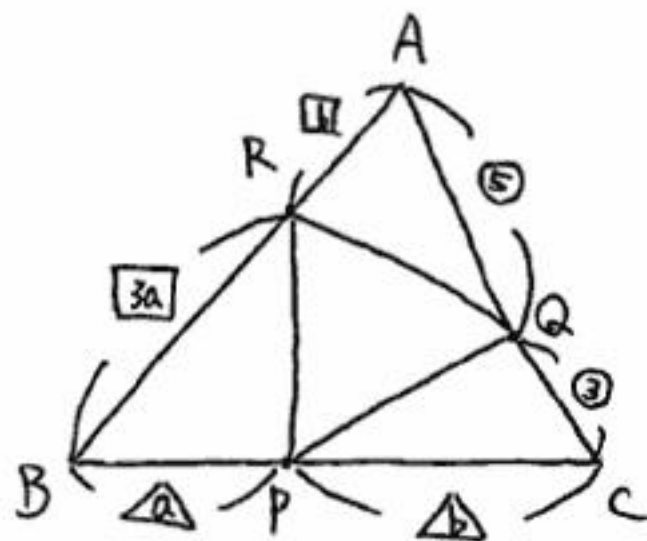
Ⅰ 解答

(1) 右図より

$$\triangle AQR = \frac{5}{8} \times \frac{b}{3a+b} \triangle ABC$$

$$\triangle BRP = \frac{3a}{3a+b} \times \frac{a}{a+b} \triangle ABC$$

$$\triangle CPQ = \frac{b}{a+b} \times \frac{3}{8} \triangle ABC$$



また、問題文より

$$\triangle PQR : \triangle ABC = 3 : 10$$

$$\Leftrightarrow \triangle AQR + \triangle BRP + \triangle CPQ : \triangle ABC = 7 : 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{8} \times \frac{b}{3a+b} + \frac{3a}{3a+b} \times \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \times \frac{3}{8} : 1 = 7 : 10$$

$$\Leftrightarrow 7 = \frac{10}{8(3a+b)(a+b)} \times \{5b(a+b) + 8 \times 3a^2 + 3b(3a+b)\}$$

$$\Leftrightarrow 28(3a+b)(a+b) = 5 \times (24a^2 + 14ab + 8b^2)$$

$$\Leftrightarrow 28(3a^2 + 4ab + b^2) = 120a^2 + 70ab + 40b^2$$

$$\Leftrightarrow 6a^2 - 7ab + 2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3a-2b)(2a-b) = 0 \quad \dots \text{答}$$

(2) (1) より $a:b = 2:3$ または $1:2$

== 2" a, b が 2 以上の自然数で最大公約数が 1 であるとは" $a=2, b=3$ と考えれば"

$$a=2, b=3 \quad \dots \text{答}$$

② (1) まず数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$n=1 \text{ のとき } \sum_{k=1}^1 a_k = 1$$

$$\therefore a_1 = 1$$

$n \geq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^n a_k = n^2$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} a_k = (n-1)^2$$

$$a_n = n^2 - (n-1)^2$$

$$= 2n - 1 \quad (\text{これは } n=1 \text{ のときも成り立つ。})$$

これを代入

$$\sum_{k=1}^n (a_k)^2 = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2$$

$$= 4 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

$$= \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n$$

$$= \frac{n}{3} (4n^2 - 1) \quad \dots \text{答}$$

(2) まず数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$$n=1 \text{ のとき } \sum_{k=1}^1 b_k = 2$$

$$\therefore b_1 = 2$$

$n \geq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^n b_k = 2^n$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2^{n-1}$$

$$b_n = 2^n - 2^{n-1}$$

$$= 2^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

これを代入 $n \geq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^n (b_k)^2 = \sum_{k=2}^n (2^{k-1})^2 + (b_1)^2$$

$$= 4 \cdot \frac{4^{n-1} - 1}{4 - 1} + 4$$

$$= \frac{1}{3} (4^n + 8) \quad \dots \text{答}$$

これは $n=1$ のときも満たす。

(3) $n \geq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_1 b_1 + \sum_{k=2}^n (2k-1) \cdot 2^{k-1}$$

$$= 1 \cdot 2 + \sum_{k=2}^n k \cdot 2^k - \sum_{k=2}^n 2^{k-1}$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^n k \cdot 2^k = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n$$

$$\rightarrow 2 \sum_{k=2}^n k \cdot 2^k = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$$

$$- \sum_{k=2}^n k \cdot 2^k = 8 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n - n \cdot 2^{n+1}$$

$$= 8 + 8 \cdot \frac{2^{n-2} - 1}{2 - 1} - n \cdot 2^{n+1}$$

$$\therefore \sum_{k=2}^n k \cdot 2^k = n \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n a_k b_k = 2 + n \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} - 2 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1}$$

$$= 4 - 3 \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1} \quad \dots \text{答}$$

これは $n=1$ のときも満たす。

3 解答

(与式) $\Leftrightarrow |x^3 - 3x^2 + 2| = a(x+1) + 2 \dots \textcircled{P}$

$\therefore \text{与式} \quad f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2|, \quad g(x) = a(x+1) + 2 \quad \text{とおく.}$

$y = f(x) \quad \text{と} \quad y = g(x)$ のグラフの交点の個数を考える。

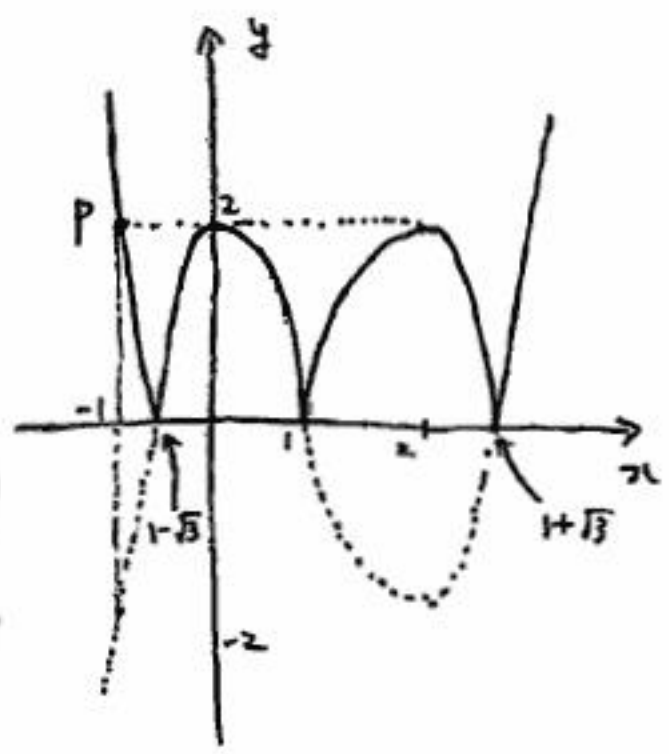
$\textcircled{P}$ より、 $\therefore$ の個数と与式の実数解の個数は等しい。

まず $y = f(x)$ のグラフの形を知るために、 $y = x^3 - 3x^2 + 2$ のグラフを考え、 x 軸に關して折り返す。

$y' = 3x^2 - 6x$
 $= 3x(x-2)$ より増減表は

x	$\dots$	0	$\dots$	2	$\dots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

となり、 $x^3 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})$ より
 $y = f(x)$ のグラフは右図の実線のようになる。



次に $y = g(x)$ は点 P を通る直線であり、

$y = g(x)$ が点 $(1+\sqrt{3}, 0)$ を通るとき $a(2+\sqrt{3}) + 2 = 0 \quad \therefore a = 2\sqrt{3} - 4$

$=$ 点 $(1, 0)$ を $\quad \quad \quad a \cdot 2 + 2 = 0 \quad \therefore a = -1$

$=$ 点 $(1-\sqrt{3}, 0)$ を $\quad \quad \quad a(2-\sqrt{3}) + 2 = 0 \quad \therefore a = -2\sqrt{3} - 4$

$y = g(x)$ が点 P 2- $y = f(x)$ に接するとき $a = f'(1) \quad \therefore a = -9$

以上より

- $0 < a$ のとき 2 個
- $a = 0$ のとき 4 個
- $2\sqrt{3} - 4 < a < 0$ のとき 6 個
- $a = 2\sqrt{3} - 4$ のとき 5 個
- $-1 < a < 2\sqrt{3} - 4$ のとき 4 個
- $a = -1$ のとき 3 個
- $-9 < a < -1$ のとき 2 個
- $a = -9$ のとき 1 個
- $a < -9$ のとき 2 個

... 答

4 解答

右図のように部屋に名前をつけた。

A	B	C
D	E	F

さらに、小文字のアルファベットは、

その状況下で、その大文字の部屋に入る確率を表すものとする。

部屋の入り方は、部屋の対称性を考え

$$\begin{cases} A \rightarrow B \rightarrow C \dots \textcircled{1} \\ A \rightarrow C \rightarrow B \dots \textcircled{2} \\ B \rightarrow A \rightarrow C \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

の3通りも考えなければならない。

(i) ①について

Aに1人目が入ったとき、2人目は、 $b = d = \frac{1}{9}$, $c = e = \frac{2}{9}$, $f = \frac{1}{3}$ より
Bに入る確率は $\frac{1}{9}$...

次に3人目は、 $c = d = e = \frac{1}{5}$, $f = \frac{2}{5}$ より Cに入る
確率は $\frac{1}{5}$

よって ①となる確率は $\frac{1}{9} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{270}$

(ii) ②について

(i)と同様に考え $\frac{1}{9} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{135}$

(iii) ③について

Bに1人目が入ったとき $a = c = e = \frac{1}{7}$, $d = f = \frac{2}{7}$ より、
2人目がAに入る確率は $\frac{1}{7}$

次に3人目がCに入る確率は、 $c = d = e = \frac{1}{5}$, $f = \frac{2}{5}$ より $\frac{1}{5}$

よって ③となる確率は $\frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{210}$

最後に3人組が何通りあるかを考える。

①, ②は、A, C, D, F から始まる4通りがある。

③も、1人目がBまたはEで、2人目が左右どちらかに
入ると考えられるので、4通り。

以上より $\left(\frac{1}{270} + \frac{1}{135} + \frac{1}{210} \right) \times 4 = \frac{4}{63} \dots$ 答

5 解答

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \tan 75^\circ &= \tan(30^\circ + 45^\circ) \\
 &= \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ} \quad (\because \text{加法定理}) \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} \\
 &= 2 + \sqrt{3} \quad \dots \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int (x^2 \log x + x e^x) dx &= \frac{1}{3} x^3 \log x + x e^x - \int \left(\frac{1}{3} x^2 + e^x \right) dx \\
 &= \frac{1}{3} x^3 \log x + x e^x - \frac{1}{9} x^3 - e^x + C \quad \dots \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad A^{n+1} &= A^n \times A \\
 &= \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3a_n + b_n & a_n + 3b_n \\ 3c_n + d_n & c_n + 3d_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{よ、2} \quad \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \quad \dots \textcircled{7} \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n \quad \dots \textcircled{8} \\ c_{n+1} = 3c_n + d_n \quad \dots \textcircled{9} \\ d_{n+1} = c_n + 3d_n \quad \dots \textcircled{10} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{7} + \textcircled{8} \text{ より} \quad a_{n+1} + b_{n+1} &= 4(a_n + b_n) \\
 &= 4^n(a_1 + b_1) \\
 &= 4^{n+1} (\because a_1 = 3, b_1 = 1) \quad \dots \textcircled{A}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{また } \textcircled{7} - \textcircled{8} \text{ より} \quad a_{n+1} - b_{n+1} &= 2(a_n - b_n) \\
 &= 2^{n+1} \quad \dots \textcircled{B}
 \end{aligned}$$

よ、2 $\textcircled{A} + \textcircled{B}$, $\textcircled{A} - \textcircled{B}$ を考へる。

$$\begin{cases} a_n + b_n = 4^n \\ a_n = 2 \cdot 4^{n-1} + 2^{n-1} \\ b_n = 2 \cdot 4^{n-1} - 2^{n-1} \end{cases} \quad \dots \text{答}$$

次に $\textcircled{9} + \textcircled{10}$, $\textcircled{9} - \textcircled{10}$ より

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} c_{n+1} + d_{n+1} = 4(c_n + d_n) \\ c_{n+1} - d_{n+1} = 2(c_n - d_n) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} c_{n+1} + d_{n+1} = 4^{n+1} \\ c_{n+1} - d_{n+1} = -2^{n+1} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} c_n = 2 \cdot 4^{n-1} - 2^{n-1} \\ d_n = 2 \cdot 4^{n-1} + 2^{n-1} \end{cases} \quad \dots \text{答}
 \end{aligned}$$

6 文字を全2実数とし、 $a \neq 0$ とし

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

とおく。次に与えられた条件を整理しよう。

(ア) $F(0) = 0$ より

$$\begin{aligned} F(0) &= f(0) + f(1) \\ &= a + b + c + 2d = 0 \end{aligned}$$

(イ) $F(\pi) = 0$ より

$$\begin{aligned} F(\pi) &= f(0) + f(-1) \\ &= -a + b - c + 2d = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii} \quad F'(x) &= 3a \cos x \sin^2 x + 2b \cos x \sin x + c \cos x \\ &\quad - 3a \sin x \cos^2 x - 2b \sin x \cos x - c \sin x \end{aligned}$$

(ウ) $F'(\pi) = 2$ より

$$F'(\pi) = -c = 2$$

(エ) $\int_0^1 f(x) dx = 0$ より

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \left[\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{2}cx^2 + dx \right]_0^1 \\ &= \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = 0 \end{aligned}$$

(オ) より $c = -2$

(カ) - (イ) より $a = 4$

(キ) を考へて $b = -6, d = 2$

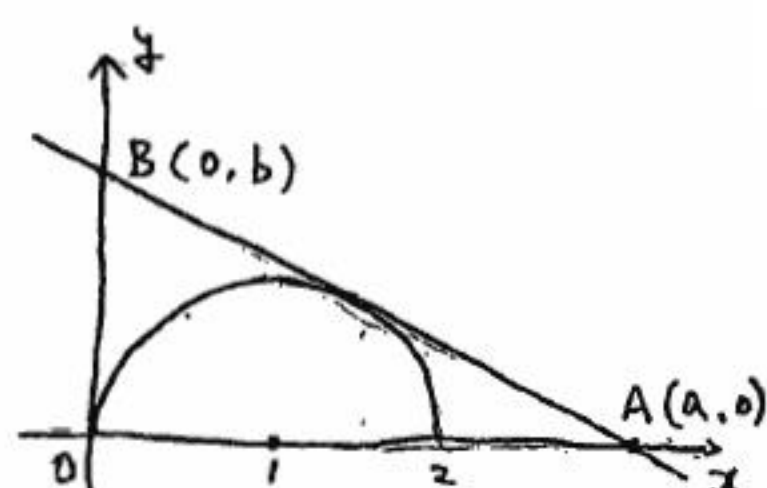
以上より $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 2 \dots$ 答

7 解答

(1) $y = \sqrt{2x - x^2}$ ($1 < x < 2$) を変形すると

$$\begin{cases} y > 0 \\ y^2 = 2x - x^2 \quad (1 < x < 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ y > 0, \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$



右図のように $A(a, 0)$, $B(0, b)$ ($a > 2, b > 1$) とおくと、接線は

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow bx + ay - ab = 0$$

と表す。このとき、点 $(1, 0)$ と a の距離が 1 となる

$$\frac{|b - ab|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow (b - ab)^2 = b^2 + a^2$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2b^2}{b^2 - 1} \quad (\because a > 2, b > 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore AB^2 &= a^2 + b^2 \\ &= \frac{(2b^2)^2}{(b^2 - 1)^2} + b^2 \\ &= \frac{b^2(b^2 + 1)^2}{(b^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB &= \frac{b(b^2 + 1)}{b^2 - 1} \\ &= b + \frac{2b}{b^2 - 1} = f(b) \text{ とおく。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(b) &= 1 + \frac{2b^2 - 2 - 4b^2}{(b^2 - 1)^2} \\ &= \frac{b^4 - 4b^2 - 1}{(b^2 - 1)^2} \\ &= \frac{(b^2 - 2 - \sqrt{5})(b^2 - 2 + \sqrt{5})}{(b^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

よって $f(b)$ の増減表は下のようになる。

b	1	...	$\sqrt{2+\sqrt{5}}$	...
$f'(b)$		-	0	+
$f(b)$		↘		↗

よって AB^2 は $b^2 = 2 + \sqrt{5}$ のとき最小となり、その値は

$$\begin{aligned} AB^2 &= \frac{(2+\sqrt{5})(2+\sqrt{5}+1)^2}{(2+\sqrt{5}-1)^2} \\ &= \frac{11+5\sqrt{5}}{2} \dots \text{答} \end{aligned}$$

(2) $\triangle OAB$ の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ab \\ &= \frac{b^3}{b^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dS}{db} &= \frac{3b^2(b^2 - 1) - b^3 \cdot 2b}{(b^2 - 1)^2} \\ &= \frac{b^2(b^2 - 3)}{(b^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

よって増減表は下のようになる。 S は $b = \sqrt{3}$ のとき最小となる。

b	1	...	$\sqrt{3}$	...
$f'(b)$		-	0	+
$f(b)$		↘		↗

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} \dots \text{答}$$