

$$(1) \quad (\text{与式}) \iff 1 - 2\sin^2 x = \sin x + 1$$

$$\iff \sin x(1 + 2\sin x) = 0$$

$$\iff \sin x = 0, -\frac{1}{2}$$

$-\pi \leq x \leq \pi$ であったので

$$x = -\pi, -\frac{5}{6}\pi, -\frac{1}{6}\pi, 0, \pi \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) 与式の辺々で底が 10 の対数をとって

$$\log_{10} x \log_{10} (\log_{10} x) = 2 \log_{10} x$$

$$\iff \log_{10} (\log_{10} x) = 2 \quad (\because x > 1 \text{ より } \log_{10} x > 0)$$

$$\iff \log_{10} x = 100$$

$$\therefore x = 10^{100} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(3) \quad \text{与式より} \quad 5 \times 0.\dot{m}\dot{n} = 0.\dot{n}\dot{m} + \frac{200}{99} \quad \dots\dots(\text{ア})$$

$$\text{与式} \times 100 \text{ より} \quad 5 \times (0.\dot{m}\dot{n} + 10m + n) = 0.\dot{n}\dot{m} + 10n + m + \frac{20000}{99} \quad \dots\dots(\text{イ})$$

$$(\text{イ}) - (\text{ア}) \text{ より} \quad 50m + 5n = 10n + m + \frac{19800}{99}$$

$$\iff 49m = 5(n + 40) \quad \dots\dots(\text{ウ})$$

m, n は整数であるので, (ウ) の左辺は 5 の倍数であり,

$m = 0$ では不適である. よって $m = 5, n = 9 \quad \dots\dots(\text{答})$

2 $n \geq 2$ のとき

$$S_n = 2a_n - n(n+1)$$

$$\rightarrow S_{n-1} = 2a_{n-1} - (n-1)n$$

$$a_n = 2a_n - 2a_{n-1} - 2n$$

$$\therefore a_n = 2a_{n-1} + 2n$$

これを変形していく.

$$\begin{aligned} a_n + 2n + 4 &= 2a_{n-1} + 4n + 4 \\ &= 2(a_{n-1} + 2(n-1) + 4) \end{aligned}$$

よって、数列 $\{a_n + 2n + 4\}$ は公比 2 の等比数列で、

初項は $a_1 + 2 + 4 = 8$ ($S_1 = 2a_1 - 2$ より $a_1 = 2$)

以上より $a_n + 2n + 4 = 8 \cdot 2^{n-1}$

$$\therefore a_n = 2^{n+2} - 2n - 4 \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + (3-a)x - 2a}{x^3} \quad \text{とおく.}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x+3-a)x^3 - 3x^2 \{2x^2 + (3-a)x - 2a\}}{x^6} \\ &= \frac{4x^2 + (3-a)x - 6x^2 - 3(3-a)x + 6a}{x^4} \\ &= -\frac{2}{x^4}(x+3)(x-a) \end{aligned}$$

よって、 $x > 0$ での $f(x)$ の増減表は下のようになる。

x	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗		↘

以上より、すべての $x > 0$ で $f(x) \leq b$ が成り立つことは、
 $f(a) \leq b$ が成り立つことと同値であることが分かる。

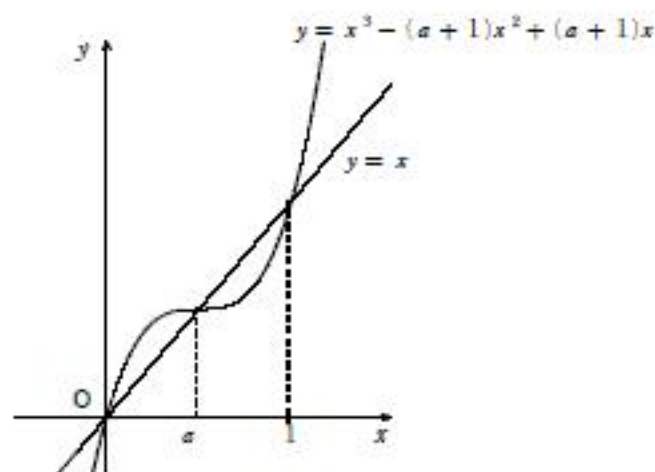
$$f(a) = \frac{a+1}{a^2} \leq b \quad \dots\dots(\text{答})$$

(1) まず曲線と直線の交点の x 座標を求める.

$$\begin{aligned} x^3 - (a+1)x^2 + (a+1)x &= x \\ \Leftrightarrow x^3 - (a+1)x^2 + ax &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-a)(x-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, a, 1 \end{aligned}$$

$0 \leq a \leq 1$ であることを考えて, 右図が描ける.
よって

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a (x^3 - (a+1)x^2 + ax) dx \\ &\quad + \int_a^1 -(x^3 - (a+1)x^2 + ax) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^a \\ &\quad + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_1^a \\ &= -\frac{1}{6}a^4 + \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{6}a + \frac{1}{12} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$



(2)

$$\begin{aligned} S'(a) &= -\frac{2}{3}a^3 + a^2 - \frac{1}{6} \\ &= -\frac{1}{6} \left(a - \frac{1}{2} \right) (4a^2 - 4a - 2) \end{aligned}$$

ここで $0 \leq a \leq 1$ では, $4 \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 - 3 < 0$ であるので,

$S(a)$ は $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ で減少, $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ で増加となる.

したがって, 求める a の値は $a = \frac{1}{2}$ $\dots\dots(\text{答})$