

- (1) l と $y=mx^2+a$ との接点をPとして、
そのPのx座標を p とする($p>0$).

l と $y=nx^2+b$ との接点をQとして、
そのQのx座標を q とする($q<0$).

$$l: y=2mp(x-p)+mp^2+a$$

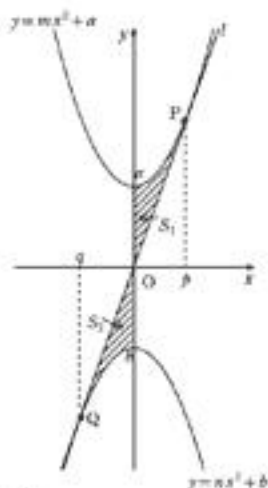
$$\Leftrightarrow y=2mpx-\underbrace{mp^2+a}_{=0} \dots\dots ①$$

同じく、 $l: y=2nq(x-q)+nq^2+b$

$$\Leftrightarrow y=2nqx-\underbrace{nq^2+b}_{=0} \dots\dots ②$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}, \begin{cases} a=mp^2 \\ b=nq^2 \\ 2mp=2nq \end{cases}$$

$$\therefore \underline{\underline{(\text{答}) \quad ma=nb}}$$



$$(2) \quad S_1 = \int_0^p m(x-p)^2 dx = \left[\frac{m}{3}(x-p)^3 \right]_0^p = \frac{mp^3}{3}$$

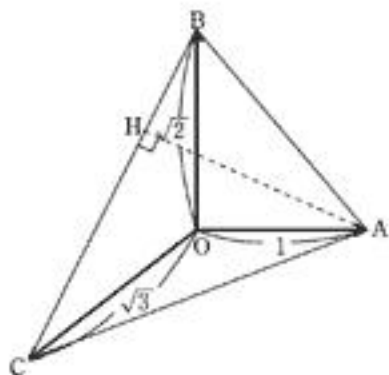
$$S_2 = \int_q^0 -n(x-q)^2 dx = \left[-\frac{n}{3}(x-q)^3 \right]_q^0 = \frac{nq^3}{3}$$

これより、

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{mp^3}{3}}{\frac{nq^3}{3}} = \frac{na}{mb} = \left(\frac{a}{b} \right)^2$$

$$\therefore \underline{\underline{(\text{答}) \quad \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{a}{b} \right)^2}}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC} \\
 & \therefore |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2 \\
 & \iff |\overrightarrow{OA}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2 \\
 & \iff 1 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2 = 3 \quad \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \\
 & \text{これより, } \underline{\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}} \text{ は示された}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \overrightarrow{OH} \text{ は実数 } t \text{ を用いて,} \\
 & \overrightarrow{OH} = (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \\
 & = (1-t)\overrightarrow{OB} - t(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\
 & = -t\overrightarrow{OA} + (1-2t)\overrightarrow{OB}
 \end{aligned}$$

と表せる,

ここで, $\overrightarrow{AH} = -(1+t)\overrightarrow{OA} + (1-2t)\overrightarrow{OB}$ より

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left\{ -(1+t)\overrightarrow{OA} + (1-2t)\overrightarrow{OB} \right\} \cdot (-\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}) \\
 &= 1+t-4(1-2t)=0 \quad (\because \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0)
 \end{aligned}$$

$$\therefore t = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \overrightarrow{AH} &= -\frac{4}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \\
 &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OA})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore |\overrightarrow{AH}|^2 &= \frac{1}{9}(|\overrightarrow{OB}|^2 + 16|\overrightarrow{OA}|^2) \quad (\because \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\therefore \underline{\underline{(\text{答}) } |\overrightarrow{AH}| = AH = \sqrt{2}}$$

$m = 2l - 1$ (l を自然数), 連続する $2k - 1$ (k を自然数) 個の自然数の和を N とする.

$$\begin{aligned}
 N &= \overbrace{(2l-1) + (2l) + (2l+1) + \cdots + (2l+2k-3)}^{2k-1 \text{ 個}} \\
 &= \frac{(2k-1)(2l-1+2l+2k-3)}{2} \\
 &= (2k-1)(2l+k-2) = 2010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67
 \end{aligned}$$

ここで, $2k-1$ は 1 以上の奇数, $2l+k-2 \geq 1$ に注意して,

$$\binom{2k-1}{2l+k-2} = \binom{1}{2010} \cdot \binom{3}{670} \cdot \binom{5}{402} \cdot \binom{15}{134} \cdot \binom{67}{30} \cdot \binom{201}{10} \cdot \binom{335}{6} \cdot \binom{1005}{2}$$

k と l は自然数より, $(k, l) = (2, 335), (8, 64)$

このとき, m の値は $m = 2l - 1$ より

$m = 669, 127$ (答)

$$(1) \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$$

$$= x^4 + (a+b)x^3 + (ab+2)x^2 + (a+b)x + 1$$

x についての恒等式より左右の係数を比較して、

$$\therefore \underbrace{\begin{cases} a+b=1 \\ ab=-1 \end{cases}}_{\text{(答)}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{ちなみに} \\ (a, b) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2} \right) \text{ (複号同順)} \end{array} \right)$$

$$(2) \quad 2 \text{ 次方程式 } x^2 + ax + 1 = 0 \text{ の } 2 \text{ 解を } x = \alpha, \beta$$

$$\text{解と係数の関係より } \begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha\beta = 1 \end{cases} \quad \text{これより, } \underline{\beta = \frac{1}{\alpha}} \text{ が示された}$$

$$(3) \quad (2) \text{ の } x = \alpha \text{ は } \begin{cases} \alpha^5 = 1 \quad (\alpha \neq 0, \alpha \text{ は虚数解}) \\ \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \alpha^2 + a\alpha + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{をみたく、}$$

次に、2 次方程式 $x^2 + bx + 1 = 0$ の解について調べる、

$$(\alpha^2)^2 + b(\alpha^2) + 1 = \alpha^4 + (1-a)\alpha^2 + 1$$

$$= -(\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) + \left(1 + \alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\alpha^2 + 1 = 0 \quad (\because \textcircled{1})$$

つまり、 $x = \alpha^2$ は 2 次方程式 $x^2 + bx + 1 = 0$ の解とわかり、

もう 1 つの解を $x = \gamma$ とおくと、解と係数の関係より

$$\alpha^2 \times \gamma = 1 \iff \gamma = \frac{1}{\alpha^2}$$

これより、2 次方程式 $x^2 + bx + 1 = 0$ の 2 解は $x = \alpha^2, \frac{1}{\alpha^2}$ となる
