1

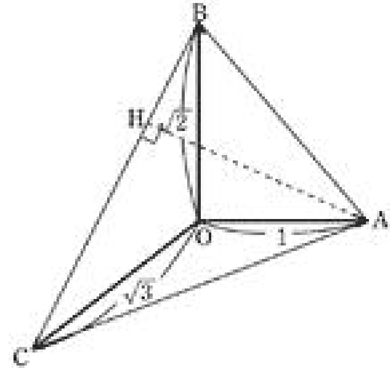
(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\iff\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$

$\therefore\ \left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2$

$\iff\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2$

$\iff 1+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2=3\ \therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

これより, $\underline{\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\text{ は示された}}$



(2) $\overrightarrow{OH}$ は実数 t を用いて,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}&=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\,\overrightarrow{OC}\\&=(1-t)\overrightarrow{OB}-t\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\\&=\underline{-t\,\overrightarrow{OA}+(1-2t)\overrightarrow{OB}}\end{aligned}$$

と表せる.

ここで, $\overrightarrow{AH}=-(1+t)\overrightarrow{OA}+(1-2t)\overrightarrow{OB}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}&=\left\{-(1+t)\overrightarrow{OA}+(1-2t)\overrightarrow{OB}\right\}\cdot\left(-\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}\right)\\&=1+t-4(1-2t)=0\quad(\because\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad t=\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad\overrightarrow{AH}&=-\frac{4}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\\&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OA}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \left|\overrightarrow{AH}\right|^2&=\frac{1}{9}\left(\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+16\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\right)\quad(\because\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0)\\&=2\end{aligned}$$

$\therefore$ (答) $\underline{\left|\overrightarrow{AH}\right|=AH=\sqrt{2}}$

2

$m=2l-1$（lを自然数），連続する$2k-1$（kを自然数）個の自然数の和をNとする．

$$N=\overbrace{(2l-1)+(2l)+(2l+1)+\cdots\cdots+(2l+2k-3)}^{2k-1\text{個}}$$

$$=\frac{(2k-1)(2l-1+2l+2k-3)}{2}$$

$$=(2k-1)(2l+k-2)=2010=2\times3\times5\times67$$

ここで，$2k-1$は1以上の奇数，$2l+k-2\geqq1$ に注意して，

$$\begin{pmatrix}2k-1\\2l+k-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2010\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\670\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\402\end{pmatrix},\begin{pmatrix}15\\134\end{pmatrix},\begin{pmatrix}67\\30\end{pmatrix},\begin{pmatrix}201\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}335\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1005\\2\end{pmatrix}$$

kとlは自然数より，$(k,l)=(2,335),(8,64)$

このとき，mの値は　　$m=2l-1$ より　　$\underline{m=669,127}$（答）