

- $\boxed{1}$ (1) $f(x) = \cos x \sin^2 x = \cos x - \cos^3 x$,
 $f'(x) = -\sin x - 3\cos^2 x(-\sin x) = \sin x(3\cos^2 x - 1)$ であるから,
 $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$ を満たす x を α とおくと, $f(x)$ の増減表は次のよ
 うになる.

x	0	...	α	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	+	0	-	-
$f(x)$	0	↗		↘	0

$f(x)$ の極大値は $f(\alpha) = \cos \alpha - \cos^3 \alpha = \underline{\underline{\frac{2}{3\sqrt{3}}}}$ である.

- (2) $f(x)$ と $g(x)$ を連立すると,

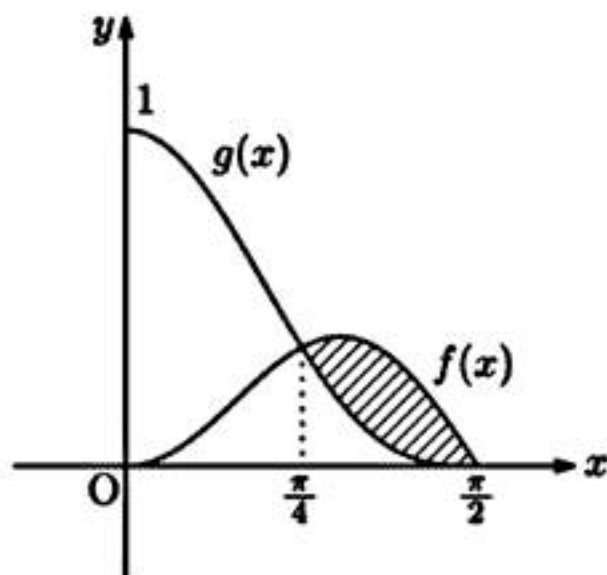
$$\cos x - \cos^3 x = \cos^3 x$$

$$2\cos^3 x - \cos x = 0$$

$$\cos x(2\cos^2 x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$$

より, $x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ である. これより $f(x)$ と $g(x)$ のグラフは次のようになる.



求める面積は

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) - g(x)\} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 2\cos^3 x) dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x + 2\sin^2 x \cos x) dx = \left[-\sin x + \frac{2}{3} \sin^3 x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}-1}{3}}}$$

である.

- ② (1) A が逆行列をもつと仮定すると、 $A^2 = O$ の両辺に A^{-1} をかけて $A = O$ となり、 $A \neq O$ と矛盾する。よって、 A は逆行列をもたないので、 $ad - bc = 0$ 。
 また、ケーリー・ハミルトンの定理より、 $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$ であるから、 $A^2 = O$ 、 $ad - bc = 0$ と合わせて、 $-(a + d)A = O$ 。
 $A \neq O$ なので $a + d = 0$ 。□

- (2) 点 $P(x, y)$ の A による像を点 (X, Y) とすると、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

である。

- (i) $(b, d) \neq (0, 0)$ のとき、

$$\begin{aligned} dX - bY &= d(ax + by) - b(cx + dy) \\ &= (ad - bc)x \\ &= 0 \end{aligned}$$

から、任意の点 P は A によって原点を通る直線 $dx - by = 0$ 上に移る（ただし、(1)の結果より $ad - bc = 0$ であることを用いた）。

- (ii) $(b, d) = (0, 0)$ のとき、 $a + d = 0$ より $a = 0$ で、 $A \neq O$ より $c \neq 0$ である。このとき、 $(X, Y) = (0, cx)$ より、任意の点 P は A によって原点を通る直線 $x = 0$ に移る。

よって題意は示された。□