

右図より折り返し x 軸上の点 $(2, 0)$ で
 接する円は 2 つあり、円 C : 中心 $A(2, 1)$, 半径 $r=1$
 と、円 C' : 中心 $A'(2, -1)$, 半径 $r'=1$ の円である。
 よって、求める $l(l')$ は 2 点 OA, OA' の
 垂直二等分線であればよい。

$$l: y = -2(x-1) + \frac{1}{2}$$

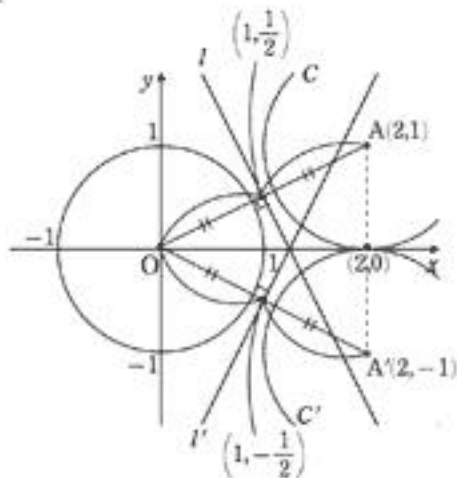
$$\iff y = -2x + \frac{5}{2}$$

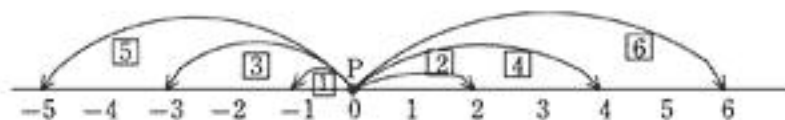
$$l': y = 2(x-1) - \frac{1}{2}$$

$$\iff y = 2x - \frac{5}{2}$$

以上より、求める直線 $l(l')$ は

$$\underline{y = -2x + \frac{5}{2}, y = 2x - \frac{5}{2} \quad (\text{答})}$$





- (1) 4回 $\begin{cases} \boxed{2} \text{ の目} & \cdots \cdots 2 \text{ 回} \\ \boxed{1} \text{ の目} & \cdots \cdots 2 \text{ 回} \end{cases}$ のときのみ 独立試行の確率を用いて

$$P = {}_4C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6}{36 \times 36} = \frac{1}{216} \quad (\text{答})$$

(2)

$$\text{さいころの目} \quad \begin{cases} \boxed{2} \rightarrow (+2) \\ \boxed{4} \rightarrow (+4) \\ \boxed{6} \rightarrow (+6) \end{cases}, \quad \begin{cases} \boxed{1} \rightarrow (-1) \\ \boxed{3} \rightarrow (-3) \\ \boxed{5} \rightarrow (-5) \end{cases} \quad \text{と表記する.}$$

4回の和が(+2)となればよい.

$\boxed{2}$ が2回以上は(1)の $P(\boxed{2} \text{ が2回以上}) = \frac{1}{216}$ だから

$\boxed{2}$ が1回と0回について調べる.

(i) $\boxed{2}$ が1回するとき,

$$(+2) + (+4) + (-1) + (-3) = (+2)$$

$$(+2) + (+6) + (-1) + (-5) = (+2)$$

$$(+2) + (+6) + (-3) + (-3) = (+2)$$

$$P(\boxed{2} \text{ が1回}) = 4! \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times 2 + \frac{4!}{2!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{5}{108}$$

(ii) $\boxed{2}$ が0回するとき,

$$\left. \begin{aligned} (+4) + (+4) + (-1) + (-5) &= (+2) \\ (+4) + (+4) + (-3) + (-3) &= (+2) \\ (+4) + (+6) + (-3) + (-5) &= (+2) \\ (+6) + (+6) + (-5) + (-5) &= (+2) \end{aligned} \right\} \text{の4通り}$$

$$\begin{aligned} P(\boxed{2} \text{ が0回}) &= \frac{4!}{2!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 + 4! \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

以上はすべて排反なので

$$\begin{aligned} P &= P(\boxed{2} \text{ が2回以上}) + P(\boxed{2} \text{ が1回}) + P(\boxed{2} \text{ が0回}) \\ &= \frac{1}{216} + \frac{5}{108} + \frac{1}{27} \\ &= \frac{19}{216} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= 2(3\sin x - 4\sin^3 x) + (1 - 2\sin^2 x) - 2\sin x + a \\
 &= -8\sin^3 x - 2\sin^2 x + 4\sin x + a + 1
 \end{aligned}$$

ここで, $t = \sin x$ ($-1 \leq t \leq 1$) と置き換える.

$$y = f(t) = -8t^3 - 2t^2 + 4t + a + 1 \quad (-1 \leq t \leq 1) \text{ となる.}$$

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= -24t^2 - 4t + 4 \\
 &= -4(6t^2 + t - 1) \\
 &= -4(3t - 1)(2t + 1)
 \end{aligned}$$

t	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		1
$f'(t)$	-		0	+	0	-	
$f(t)$	$a+3$ (最大)	$\searrow$	$a-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$a+\frac{49}{27}$	$\searrow$	(最小) $a-5$

$$\begin{cases}
 \text{(最大値)} = f(-1) = a+3 \\
 \text{(最小値)} = f(1) = a-5
 \end{cases} \quad \text{より, 題意の条件から}$$

$$|a-5| = a+3$$

$$(a \geq 5 \text{ のとき}) \quad a-5 = a+3 \quad (\text{不適})$$

$$(a \leq 5 \text{ のとき}) \quad 5-a = a+3 \iff a=1 \quad (\text{適する})$$

$$\text{以上より} \quad \underline{\underline{(\text{答}) } a=1}$$

- (1) 直線 $mx - y = 0$ と点 $(p, \frac{1}{4}p^2)$ との距離は

$$\frac{\left| mp - \frac{1}{4}p^2 \right|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{1}{4}p^2$$

$$\Leftrightarrow \left| m - \frac{1}{4}p \right| = \frac{p}{4}\sqrt{m^2 + 1}$$

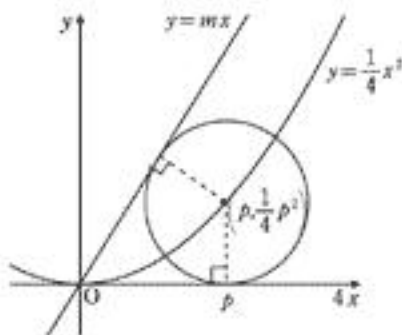
$$\therefore \left(m - \frac{p}{4} \right)^2 = \frac{p^2}{16}(m^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 16 \left(m^2 - \frac{m}{2}p + \frac{p^2}{16} \right) = p^2 m^2 + p^2$$

$$\Leftrightarrow (16 - p^2)m^2 = 8p$$

$$\Leftrightarrow (16 - p^2)m = 8p \quad (m > 0 \geq 0)$$

$$\therefore m = \frac{8p}{16 - p^2} \quad (0 < p < 4) \quad (\text{答})$$



- (2) $\frac{1}{4}x^2 = mx \Leftrightarrow x^2 - 4mx = 0 \Leftrightarrow x(x - 4m) = 0 \therefore x = 0, 4m$

囲まれる面積を S とする,

$$S = \int_0^{4m} \left(mx - \frac{1}{4}x^2 \right) dx = -\frac{1}{4} \int_0^{4m} x(x - 4m) dx$$

$$= \frac{1}{24} \cdot (4m)^3 = \frac{8}{3}m^3 = \frac{1}{3} \quad \text{より} \quad m = \frac{1}{2}$$

$$(1) \text{ の結果より } \frac{1}{2} = \frac{8p}{16 - p^2} \Leftrightarrow p^2 + 16p - 16 = 0$$

$$\therefore p = -8 + 4\sqrt{5} \quad (0 < p < 4 \text{ より})$$

以上より, (答) $m = \frac{1}{2}, p = -8 + 4\sqrt{5}$

(1) 条件より

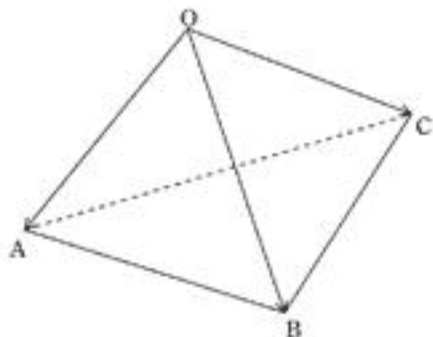
$$\begin{cases} \vec{OA} \cdot (\vec{OC} - \vec{OB}) = 0 \\ \vec{OB} \cdot (\vec{OA} - \vec{OC}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OC} \cdot \vec{OA} (=k) \text{ とおく.}$$

(ただし, k は実数)

$$\begin{aligned} \text{ここで, } \vec{OC} \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) &= \vec{OB} \cdot \vec{OC} - \vec{OC} \cdot \vec{OA} \\ &= k - k = 0 \end{aligned}$$

これより, $\vec{OC} \perp \vec{AB}$ は示された.



$$(2) I = \int x^3 e^{x^2} dx \quad \text{とおく, } t = x^2 \text{ と置換} \quad \therefore dt = 2x dx$$

$$\begin{aligned} I &= \int t e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t(e^t)' dt = \frac{t}{2} e^t - \frac{1}{2} \int e^t dt \\ &= \frac{t}{2} e^t - \frac{1}{2} e^t + C \quad (\text{ただし, } C \text{ は積分定数}) \\ &= \frac{1}{2} (x^2 - 1) e^{x^2} + C \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 \left[4 - \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4 - \left(\frac{k}{n} \right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{4 - x^2} dx \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{(区分管積分法により)}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(2+x)(2-x)} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} [\log(2+x) - \log(2-x)]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \log 3 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(1) $y = e^{-x} \cos x$ ($x > 0$) について,

$$y' = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x$$

$$= -\sqrt{2} e^{-x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

x	(0)	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{4}\pi$	$\frac{15}{4}\pi$					
y'	-	0	+	0	-	0	+	0	-	
y		$\searrow$		$\nearrow$	a_1	$\searrow$		$\nearrow$	a_2	$\searrow$

増減表より, 極大値をとる x を x_k ($k=1, 2, 3, \dots$) とすると,

$$x_k = \frac{7}{4}\pi + (k-1) \cdot 2\pi$$

このときの y 座標は, $y = e^{-\frac{7}{4}\pi - 2\pi(k-1)} \cos\left[\frac{7}{4}\pi + 2\pi(k-1)\right]$

$$= \frac{e^{-\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}} (e^{-2\pi})^{k-1}$$

$$a_k = \frac{e^{-\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}} (e^{-2\pi})^{k-1} \quad \therefore \text{(答)} \quad \underline{a_n = \frac{e^{-\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}} (e^{-2\pi})^{n-1} \quad (n \geq 1)}$$

(2) a_n は公比 $e^{-2\pi}$ の等比数列. また, $0 < e^{-2\pi} < 1$ より収束

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}} (e^{-2\pi})^{n-1} = \frac{\frac{e^{-\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}}}{1 - e^{-2\pi}} = \frac{e^{-\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)} \quad \text{(答)}$$

$$(1) \quad \overrightarrow{OP} = (a, b), \overrightarrow{OQ} = (c, d) \text{ より}$$

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2}, |\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{c^2 + d^2}, \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = ac + bd$$

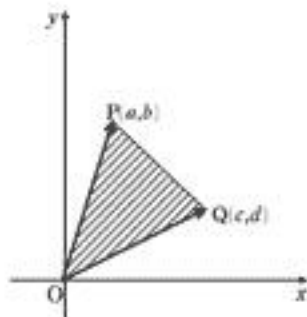
$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| \sin \angle POQ$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 |\overrightarrow{OQ}|^2 \sin^2 \angle POQ}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 |\overrightarrow{OQ}|^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(ad - bc)^2} = \frac{1}{2} |ad - bc| \quad \therefore S = \frac{1}{2} |ad - bc| \text{ は示された}$$



$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & m-1 \\ m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b(m-1) \\ am + b \end{pmatrix} \text{ より } \overrightarrow{OP'} = (a - b + bm, b + am)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & m-1 \\ m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + d(m-1) \\ cm + d \end{pmatrix} \text{ より } \overrightarrow{OQ'} = (c - d + dm, d + cm)$$

$$\begin{aligned} \text{これより, } \triangle OP'Q' &= \frac{1}{2} |(a - b + bm)(d + cm) - (b + am)(c - d + dm)| \\ &= \frac{1}{2} |(ad - bc)(1 + m - m^2)| \\ &= \frac{1}{2} |ad - bc| |1 + m - m^2| \end{aligned}$$

ここで, $\triangle OP'Q' > \triangle OPQ$

$$\iff |1 + m - m^2| > 1$$

$$\iff 1 + m - m^2 < -1 \quad \text{または} \quad 1 < 1 + m - m^2$$

$$\iff (m+1)(m-2) > 0 \quad \text{または} \quad m(m-1) < 0$$

$$\iff m < -1, 2 < m \quad \text{または} \quad 0 < m < 1$$

$$\therefore \underline{\text{(答) } m < -1, 0 < m < 1, 2 < m}$$

(このとき, 3点 O, P, Q も O, P', Q' も同一直線上にない)