$\boxed{1}$

$$x^3+(2t-2)x^2+(t^3-3t+2)x+1=0$$

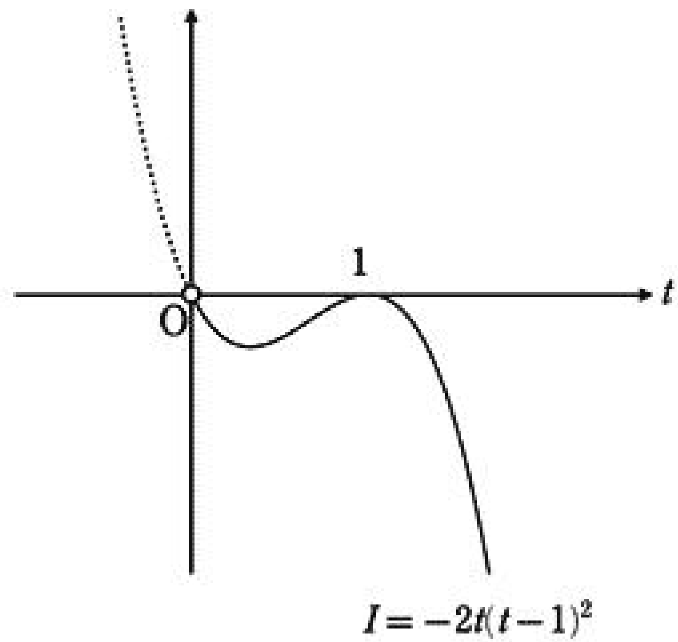
3次方程式の解を α, β, γ とする．解と係数の関係より，

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=2-2t \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=t^3-3t+2 \quad \cdots\cdots① \\ \alpha\beta\gamma=-1\end{cases}$$

ここで, $I=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ とおくと,

$$\begin{aligned}I&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\&=(2-2t)^2-2(t^3-3t+2) \quad (\because ①)\\&=-2t^3+4t^2-2t\\&=-2t(t-1)^2\end{aligned}$$

$t>0$ でグラフを描くと右図の通り．



これより, $I \leqq 0 \ (t>0)$

$\therefore \ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \leqq 0 \ (t>0)$ は示された．

(証明終)

$\boxed{2}$

(1)
$$\vec{u}\cdot\vec{a}=\left\{-\vec{x}+2\left(\vec{x}\cdot\vec{a}\right)\vec{a}\right\}\cdot\vec{a}$$
$$=-\vec{x}\cdot\vec{a}+2\vec{x}\cdot\vec{a}$$
$$=\vec{x}\cdot\vec{a}$$ （証明終）

(2)
$$\left|\vec{u}\right|^2=\left|-\vec{x}+2\left(\vec{x}\cdot\vec{a}\right)\vec{a}\right|^2$$
$$=\left|\vec{x}\right|^2-4\left(\vec{x}\cdot\vec{a}\right)^2+4\left(\vec{x}\cdot\vec{a}\right)^2$$
$$=\left|\vec{x}\right|^2 \qquad \therefore\ \underline{\left|\vec{u}\right|=\left|\vec{x}\right|} \quad \cdots\cdots①$$

$$\left|\vec{v}\right|^2=\left|-\vec{y}+2\left(\vec{y}\cdot\vec{a}\right)\vec{a}\right|^2$$
$$=\left|\vec{y}\right|^2-4\left(\vec{y}\cdot\vec{a}\right)^2+4\left(\vec{y}\cdot\vec{a}\right)^2$$
$$=\left|\vec{y}\right|^2 \qquad \therefore\ \underline{\left|\vec{v}\right|=\left|\vec{y}\right|} \quad \cdots\cdots②$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left\{-\vec{x}+2\left(\vec{x}\cdot\vec{a}\right)\vec{a}\right\}\cdot\left\{-\vec{y}+2\left(\vec{y}\cdot\vec{a}\right)\vec{a}\right\}$$
$$=\vec{x}\cdot\vec{y} \qquad \therefore\ \underline{\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{x}\cdot\vec{y}} \quad \cdots\cdots③$$

ここで,
$$\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2=\left|\vec{u}\right|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\left|\vec{v}\right|^2$$

①, ②, ③ より,
$$\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2=\left|\vec{x}\right|^2-2\vec{x}\cdot\vec{y}+\left|\vec{y}\right|^2$$
$$=\left|\vec{x}-\vec{y}\right|^2$$

以上より, $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|=\left|\vec{x}-\vec{y}\right|$ は示された. （証明終）

$\boxed{3}$

(1)
$$a_{n+1}{}^2+b_{n+1}{}^2=\left(\frac{1}{2}a_n+\frac{\sqrt{3}}{2}b_n\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n\right)^2$$
$$=a_n{}^2+b_n{}^2$$

これより, 数列 $\{a_n{}^2+b_n{}^2\}$ は初項 $a_1{}^2+b_1{}^2=1$ と全て同じ.

$\therefore\ \underline{a_n{}^2+b_n{}^2=1}$ ……(答)

(2) $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{\sqrt{3}}{2}b_n \iff b_n=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(a_{n+1}-\dfrac{1}{2}a_n\right)$

これを $b_{n+1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n$ へ代入すると,

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(a_{n+2}-\frac{1}{2}a_{n+1}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}a_n+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right)$$
$$\iff 2a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{3}{2}a_n+a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n$$
$$\iff a_{n+2}=a_{n+1}-a_n \quad (n\geqq 1)$$
$$\therefore\ a_{n+3}=a_{n+2}-a_{n+1}=-a_n$$

$\therefore\ \underline{a_{n+3}=-a_n\ \ (n\geqq 1)}$ ……(答)

$b_{n+1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n \iff a_n=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{2}b_n-b_{n+1}\right)$

これを $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{\sqrt{3}}{2}b_n$ へ代入すると,

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}b_{n+1}-b_{n+2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}b_n-b_{n+1}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}b_n$$
$$\iff b_{n+1}-2b_{n+2}=\frac{1}{2}b_n-b_{n+1}+\frac{3}{2}b_n$$
$$\iff b_{n+2}=b_{n+1}-b_n \quad (n\geqq 1)$$
$$\therefore\ b_{n+3}=b_{n+2}-b_{n+1}=-b_n$$

$\therefore\ \underline{b_{n+3}=-b_n\ \ (n\geqq 1)}$ ……(答)

(3) $\begin{cases} a_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ a_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ a_3=0 \\ b_1=\dfrac{1}{2},\ b_2=-\dfrac{1}{2},\ b_3=-1 \end{cases}$ と(2)より,

$$\begin{cases} a_{3n-2}=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a_{3n-1}=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a_{3n}=0 \end{cases}$$

$$\therefore\ a_n=\begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} & (n\text{は}3\text{で割って}1\text{余る数}) \\ (-1)^{\frac{n-2}{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} & (n\text{は}3\text{で割って}2\text{余る数}) \\ 0 & (n\text{は}3\text{で割り切れる数}) \end{cases}$$ ……(答)

$$\begin{cases} b_{3n-2}=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{2} \\ b_{3n-1}=(-1)^{n}\cdot\dfrac{1}{2} \\ b_{3n}=(-1)^{n} \end{cases} \qquad \therefore\ b_n=\begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{3}}\cdot\dfrac{1}{2} & (n\text{は}3\text{で割って}1\text{余る数}) \\ (-1)^{\frac{n+1}{3}}\cdot\dfrac{1}{2} & (n\text{は}3\text{で割って}2\text{余る数}) \\ (-1)^{\frac{n}{3}} & (n\text{は}3\text{で割り切れる数}) \end{cases}$$ ……(答)

$\boxed{4}$

(1) $f(x)=g(x)$

$$\iff -x^2+a=(x-a)^2$$

$$\iff 2x^2-2ax+a^2-a=0 \quad \cdots\cdots ①$$

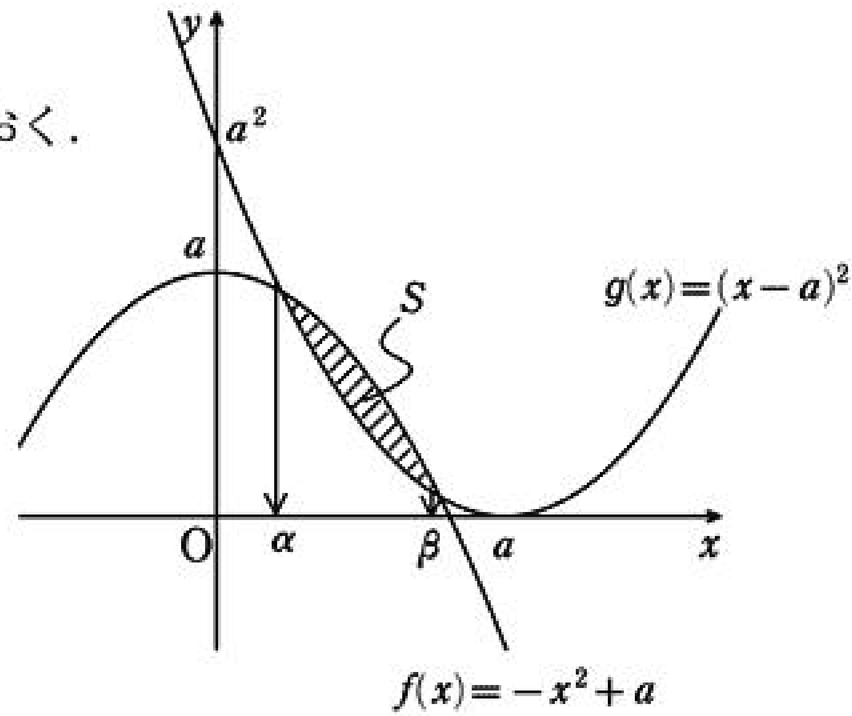
①が異なる2実解をもてばよいから

$$D/4=a^2-2(a^2-a)>0$$

$$\iff a(a-2)<0 \qquad \therefore\ \underline{0<a<2} \quad \cdots\cdots(答)$$

(2) $\alpha=\dfrac{a-\sqrt{2a-a^2}}{2},\ \beta=\dfrac{a+\sqrt{2a-a^2}}{2}$ とおく.

2つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれる図形の面積を S とすれば



$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=-2\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{3}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{a^2-4\cdot\frac{a^2-a}{2}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}(2a-a^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore\ \underline{S=\frac{1}{3}(2a-a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \cdots\cdots(答)$$