

$$\left[\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{1+a_2} + \dots + \frac{a_n}{1+a_n} > \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{1+a_1+a_2+\dots+a_n} \quad (a_1 \sim a_n > 0) \quad n \geq 2 \right] \dots\dots(*)$$

(*)を数学的帰納法で示す.

(I) $n=2$ のとき

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{1+a_2} - \frac{a_1+a_2}{1+a_1+a_2} \\ &= \frac{a_1(1+a_2)(1+a_1+a_2) + a_2(1+a_1)(1+a_1+a_2) - (a_1+a_2)(1+a_1)(1+a_2)}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_1+a_2)} \\ &= \frac{a_1 a_2 (a_1 + a_2 + 2)}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_1+a_2)} > 0 \quad \therefore \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{1+a_2} > \frac{a_1+a_2}{1+a_1+a_2} \end{aligned}$$

これより, $n=2$ において(*)は成立.

(II) $n=k$ で成立を仮定する (ただし, $k \geq 2$)

$$\text{つまり, } \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{1+a_2} + \dots + \frac{a_k}{1+a_k} > \frac{a_1+a_2+\dots+a_k}{1+a_1+a_2+\dots+a_k} \quad \dots\dots\textcircled{1} \text{ とする.}$$

ここで,

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{1+a_2} + \dots + \frac{a_k}{1+a_k} + \frac{a_{k+1}}{1+a_{k+1}} - \frac{a_1+a_2+\dots+a_k+a_{k+1}}{1+a_1+a_2+\dots+a_k+a_{k+1}} \\ & > \frac{a_1+a_2+\dots+a_k}{1+a_1+a_2+\dots+a_k} + \frac{a_{k+1}}{1+a_{k+1}} - \frac{a_1+a_2+\dots+a_k+a_{k+1}}{1+a_1+a_2+\dots+a_k+a_{k+1}} \\ &= \frac{(a_1+a_2+\dots+a_k)a_{k+1}(a_1+a_2+\dots+a_k+a_{k+1}+2)}{(1+a_1+a_2+\dots+a_k)(1+a_{k+1})(1+a_1+a_2+\dots+a_k+a_{k+1})} > 0 \end{aligned}$$

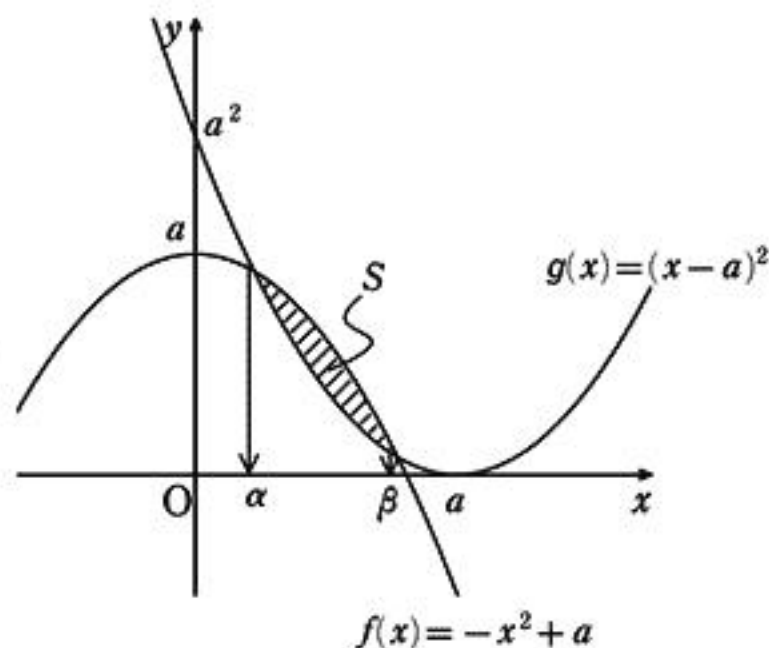
よって,

$$\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{1+a_2} + \dots + \frac{a_k}{1+a_k} + \frac{a_{k+1}}{1+a_{k+1}} > \frac{a_1+a_2+\dots+a_k+a_{k+1}}{1+a_1+a_2+\dots+a_k+a_{k+1}}$$

が成立し, $n=k+1$ でも(*)は成立.

以上(I),(II)より $n \geq 2$ に対し, (*)はつねに成立. (証明終)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & f(x) = g(x) \\
 & \Leftrightarrow -x^2 + a = (x-a)^2 \\
 & \Leftrightarrow 2x^2 - 2ax + a^2 - a = 0 \quad \dots\dots ① \\
 & D/4 = a^2 - 2(a^2 - a) > 0 \\
 & \Leftrightarrow a(a-2) < 0 \quad \therefore \underline{0 < a < 2} \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$



(2) $0 < a < 2$ の範囲で ① の異なる 2 実解を α, β ($\alpha < \beta$) とする.

$$\begin{cases} \alpha = \frac{a - \sqrt{2a - a^2}}{2} \\ \beta = \frac{a + \sqrt{2a - a^2}}{2} \end{cases}$$

解と係数の関係により,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha\beta = \frac{a^2 - a}{2} \end{cases} \quad \dots\dots ②$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{f(x) - g(x)\} dx \\
 &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\
 &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 \\
 &= \frac{1}{3}\{(\beta - \alpha)^2\}^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{1}{3}\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{1}{3}\left[a^2 - 4 \cdot \frac{a^2 - a}{2}\right]^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{1}{3}(2a - a^2)^{\frac{3}{2}} \quad \therefore \underline{S = \frac{1}{3}(2a - a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (0 < a < 2) \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

ここで, $2a - a^2 = -(a-1)^2 + 1 \leq 1$ ($0 < a < 2$) より,

$S \leq \frac{1}{3}$ (等号成立は $a=1$ のとき) は成立 (証明終)