

点 P が $(a, b), (-a, b), (-a, -b), (a, -b)$ のときは C に引いた 2 接線は直交する①

次に $r \neq \pm a$ のとき, 点 $P(r, s)$ から C に引いた接線の傾きを m とおくと, 接線は

$$y = m(x - r) + s$$

$$\Leftrightarrow y = mx - mr + s$$

これと, 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ を連立して

$$b^2 x^2 + a^2 (mx - mr + s)^2 = a^2 b^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 x^2 + a^2 (m^2 x^2 + m^2 r^2 + s^2 - 2m^2 r x - 2mrs + 2msx) - a^2 b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 m^2 + b^2) x^2 + 2(ms - m^2 r) a^2 x + a^2 (m^2 r^2 + s^2 - 2mrs) - a^2 b^2 = 0$$

ここで,

$$D/4 = (ms - m^2 r)^2 a^4 - (a^2 m^2 + b^2)(a^2 m^2 r^2 + a^2 s^2 - 2a^2 mrs - a^2 b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 (a^2 - r^2) m^2 + 2b^2 r s m + b^2 (b^2 - s^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - r^2) m^2 + 2r s m + b^2 - s^2 = 0 \quad \text{.....②}$$

楕円 C 外の点 $P(r, s)$ からつねに 2 接線が引けるので, ②の異なる 2 実解を $m = m_1, m_2$ ($m_1 \neq m_2$) とする.

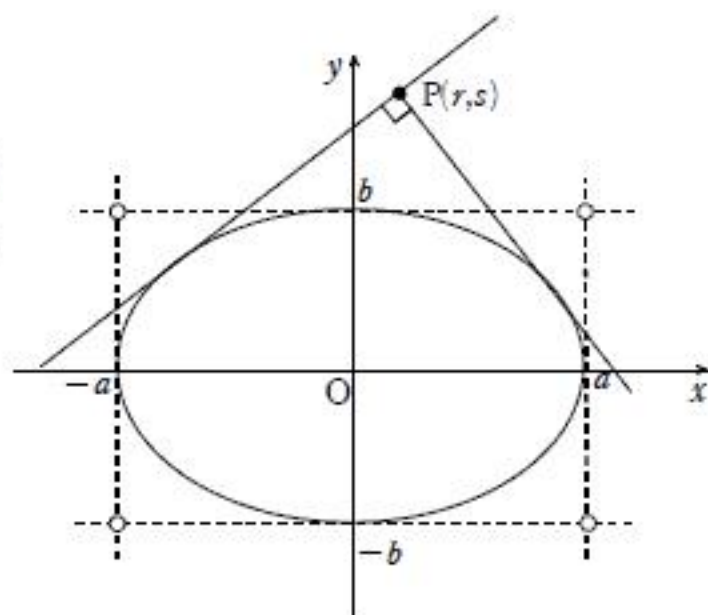
$$\text{解と係数の関係により, } \begin{cases} m_1 + m_2 = -\frac{2rs}{a^2 - r^2} \\ m_1 \cdot m_2 = \frac{b^2 - s^2}{a^2 - r^2} \end{cases} \quad \text{.....③}$$

ここで題意より, 2 接線は直交するから,

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{b^2 - s^2}{a^2 - r^2} = -1 \quad (\because \text{③})$$

$$\therefore r^2 + s^2 = a^2 + b^2 \quad \left(\text{つまり, } x^2 + y^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 \text{ これは①の 4 点も満たす} \right)$$

以上より, 点 P の軌跡は 円 $x^2 + y^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2$ (答)



$$(1) \quad f(x) = (x-a)(e^x + e^a) - 2(e^x - e^a) \quad (x > a)$$

$$f'(x) = 1 \cdot (e^x + e^a) + (x-a) \cdot e^x - 2e^x$$

$$= (x-a-1)e^x + e^a$$

$$f''(x) = 1 \cdot e^x + (x-a-1) \cdot e^x$$

$$= (x-a)e^x > 0 \quad (\because x > a)$$

これより, $y = f'(x)$ は $x > a$ で単調増加である.

$$f'(x) > f'(a) = 0$$

つまり, $y = f(x)$ は $x > a$ で単調増加である.

$$f(x) > f(a) = 0$$

以上より, $f(x) > 0 \quad (x > a)$ は示された. (証明終)

$$(2) \quad g(x) = e^x \text{ とおく.}$$

$$g'(x) = e^x$$

2点 $A(a, e^a), B(b, e^b)$ を結ぶ直線の傾きを m とすれば

$$m = \frac{e^b - e^a}{b - a} \quad (b > a) \quad \dots\dots ①$$

次に点 $C\left(\log \frac{e^a + e^b}{2}, g\left(\log \frac{e^a + e^b}{2}\right)\right)$ での接線の傾きは

$$g'\left(\log \frac{e^a + e^b}{2}\right) = e^{\log \frac{e^a + e^b}{2}} = \frac{e^a + e^b}{2} \quad \dots\dots ②$$

ここで, (1) の結果を用いて $x = b (> a)$ を代入すれば,

$$(b-a)(e^b + e^a) - 2(e^b - e^a) > 0 \quad (b > a)$$

$$\iff \frac{e^a + e^b}{2} > \frac{e^b - e^a}{b - a}$$

となり, ①, ②より, $g'\left(\log \frac{e^a + e^b}{2}\right) > m$ が示された. (証明終)