

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = b - a = c = y_1 \\ x_3 - x_2 = c - b = a = y_2 \\ x_4 - x_3 = 4 - c = b = y_3 \end{cases} \dots\dots ①$$

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = a - c = z_1 = -b \\ y_3 - y_2 = b - a = z_2 = c \end{cases} \dots\dots ②$$

①より, $a = 0, b = 2, c = 2$

②を用いて, 等差数列 $\{z_n\}$ を考えると,

$$z_1 = -2, (\text{公差}) = c - (-b) = 4$$

より,

$$\begin{aligned} z_n &= -2 + (n-1) \cdot 4 \\ &= 4n - 6 \end{aligned}$$

次に, 数列 $\{y_n\}$ を考えると, $y_{n+1} - y_n = 4n - 6$ ($y_1 = 2$) より,
 $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} y_n &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k - 6) \\ &= 2 + 4 \cdot \frac{n-1}{2} \cdot n - 6(n-1) \\ &= 2n^2 - 8n + 8 \quad (n=1 \text{ も満たす}) \end{aligned}$$

さらに,

$$x_{n+1} - x_n = 2n^2 - 8n + 8 \quad (x_1 = 0)$$

$n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=1}^{n-1} (2k^2 - 8k + 8) \\ &= 2 \cdot \frac{n-1}{6} \cdot n \cdot (2n-1) - 8 \cdot \frac{n-1}{2} \cdot n + 8(n-1) \\ &= \frac{1}{3} (2n^3 - 15n^2 + 37n - 24) \quad (\text{これは } n=1 \text{ も満たす}) \end{aligned}$$

以上より, $x_n = \frac{1}{3} (2n^3 - 15n^2 + 37n - 24), y_n = 2n^2 - 8n + 8, z_n = 4n - 6 \quad (n \geq 1) \dots\dots(\text{答})$

硬貨投げ $\begin{cases} \text{(表)} \cdots \cdots 2 \text{ 点} \\ \text{(裏)} \cdots \cdots 1 \text{ 点} \end{cases}$

(1) 表が 3 回, 裏が 4 回 より,

$$2 \times 3 + 1 \times 4 = 10 \text{ (点)}$$

となり, これ以外の組み合わせはなし.

求める確率 $P(7)$ を独立試行の確率を用いて

$$P(7) = {}_7C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{35}{128} \cdots \cdots (\text{答})$$

$$(2) \text{ 10 回で終了 } P(10) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$$

$$9 \text{ 回で終了 } P(9) = {}_9C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{9}{512}$$

$$8 \text{ 回で終了 } P(8) = {}_8C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{28}{256}$$

$$7 \text{ 回で終了 } P(7) = \frac{35}{128} \leftarrow (1) \text{ より}$$

$$6 \text{ 回で終了 } P(6) = {}_6C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64}$$

$$5 \text{ 回で終了 } P(5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

各々が排反であることに注意して, 求める確率 P は

$$P = P(10) + P(9) + P(8) + P(7) + P(6) + P(5)$$

$$= \frac{1}{1024} + \frac{9}{512} + \frac{28}{256} + \frac{35}{128} + \frac{15}{64} + \frac{1}{32}$$

$$= \frac{1 + 18 + 112 + 280 + 240 + 32}{1024}$$

$$= \frac{683}{1024} \cdots \cdots (\text{答})$$

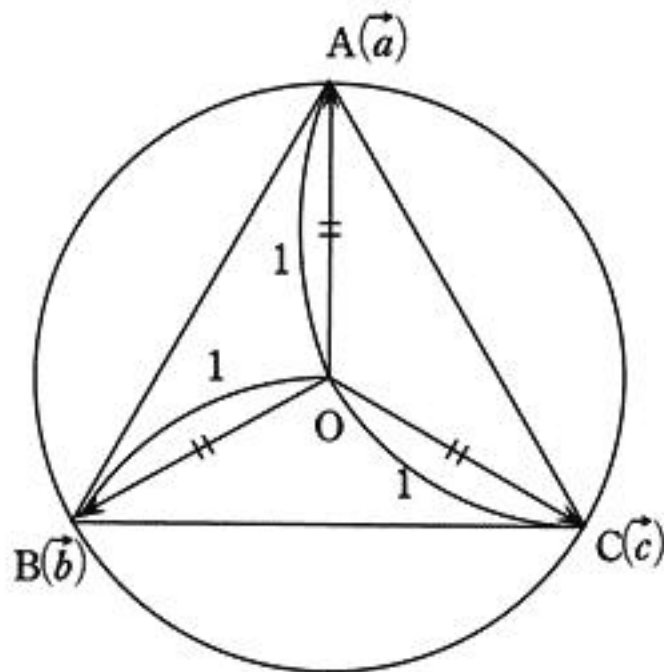
$$(1) \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

ここで, $\vec{OP} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ より

$$\begin{aligned} \vec{AP} \cdot \vec{BC} &= (\vec{OP} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OC} - \vec{OB}) \\ &= (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= |\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2 = 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore AP \perp BC$$

これより, 題意は示された. (証明終)



(2) 実数 s, t を用いて, $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$ と表せる.

$$\vec{OP} = k\vec{AB} \quad (k: \text{実数})$$

$$\iff \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = k(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\iff (s+1)\vec{a} + (t+1)\vec{b} = -k\vec{a} + k\vec{b}$$

ここで, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立より,

$$\begin{cases} s+1 = -k \\ t+1 = k \end{cases} \quad \therefore s+t+2=0 \quad \dots\dots ①$$

さらに

$$|\vec{c}|^2 = |s\vec{a} + t\vec{b}|^2 = s^2 + t^2 + 2st \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 1$$

$$\iff s^2 + t^2 - \frac{3}{2}st = 1$$

$$\iff (s+t)^2 - \frac{7}{2}st = 1 \quad \therefore st = \frac{6}{7} \quad \dots\dots ②$$

①, ②より, s と t を 2 解にもつ x の 2 次方程式は,

$$x^2 + 2x + \frac{6}{7} = 0 \quad \therefore x = -1 \pm \frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$\therefore (s, t) = \left(-1 \pm \frac{\sqrt{7}}{7}, -1 \mp \frac{\sqrt{7}}{7} \right) \quad \dots\dots (\text{答})$$

4 $\theta\left(t, \frac{1}{2}t^2 - 1\right)$ での法線の方程式は

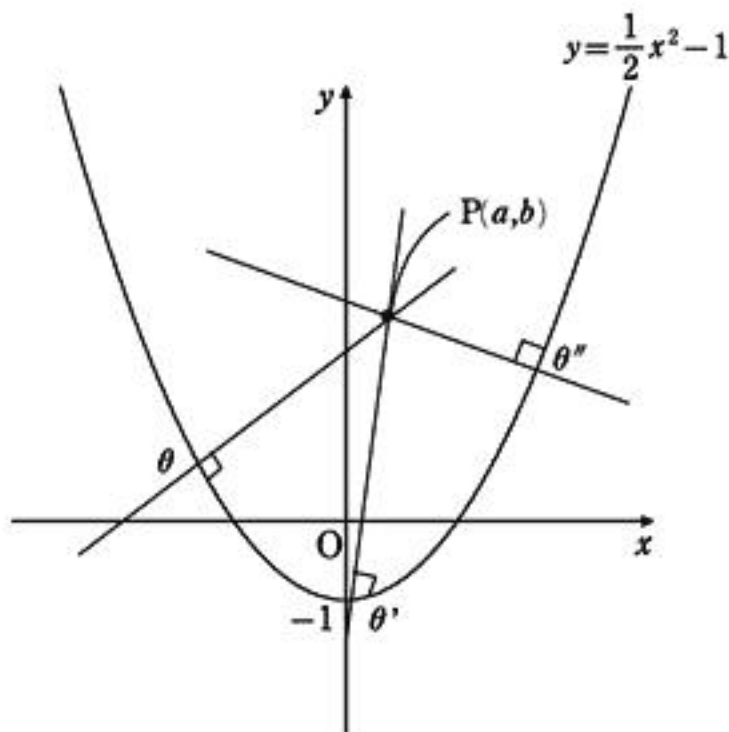
$$y = \frac{1}{2}x^2 - 1 \quad (y' = x) \text{ だから}$$

$$x + ty = \frac{1}{2}t^3$$

これが $P(a, b)$ を通るから,

$$a + tb = \frac{1}{2}t^3$$

$$\iff t^3 - 2bt - 2a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$



「3本の垂線が引ける」 $\iff$ 「 $\textcircled{1}$ が異なる3実解をもつこと」

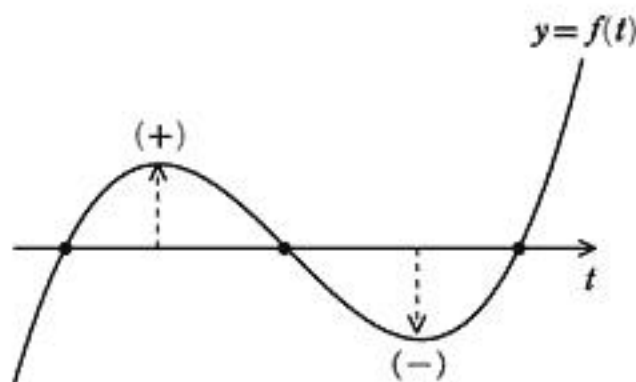
ここで, $f(t) = t^3 - 2bt - 2a$ とおく.

$$f'(t) = 3t^2 - 2b$$

$b > 0$ は必要であり, $f'(t) = 3\left(t + \frac{\sqrt{6b}}{3}\right)\left(t - \frac{\sqrt{6b}}{3}\right)$ となるから,

増減表は次の通り.

t	...	$-\frac{\sqrt{6b}}{3}$	...	$\frac{\sqrt{6b}}{3}$	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$



$$f\left(-\frac{\sqrt{6b}}{3}\right) \cdot f\left(\frac{\sqrt{6b}}{3}\right) < 0$$

$$\iff \left(\frac{4b\sqrt{6b}}{9} - 2a\right)\left(-\frac{4b\sqrt{6b}}{9} - 2a\right) < 0$$

$$\iff \left(a - \frac{2}{9}b\sqrt{6b}\right)\left(a + \frac{2}{9}b\sqrt{6b}\right) < 0$$

$$\therefore \underline{-\frac{2}{9}b\sqrt{6b} < a < \frac{2}{9}b\sqrt{6b} \quad (b > 0)} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \int \log(1+\sqrt{x}) dx = \int (x-1)' \log(1+\sqrt{x}) dx \\
 & = (x-1) \log(1+\sqrt{x}) - \int (x-1) \cdot \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\
 & = (x-1) \log(1+\sqrt{x}) - \int \frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx \\
 & = (x-1) \log(1+\sqrt{x}) + \frac{1}{2} \int \left(x^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) dx \\
 & = \underline{(x-1) \log(1+\sqrt{x}) + \sqrt{x} - \frac{x}{2} + C} \quad (C: \text{積分定数}) \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

(2) 求める体積を V とすると,

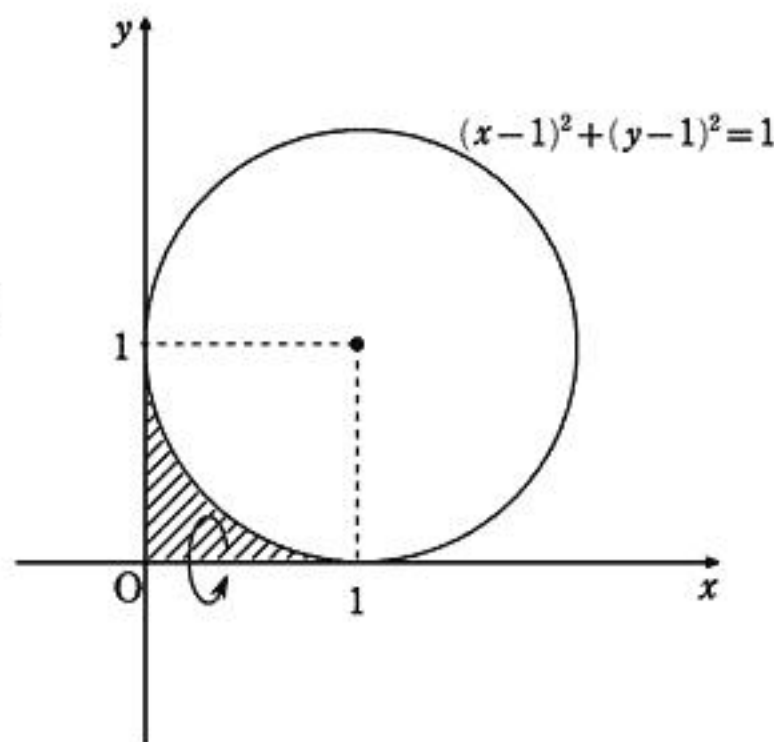
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{2x - x^2})^2 dx \\
 &= \pi \int_0^1 (1 + 2x - x^2 - 2\sqrt{2x - x^2}) dx \\
 &= \pi \left[x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 - 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 - (x-1)^2} dx
 \end{aligned}$$

$x-1 = \sin \theta$ と置換する. ($dx = \cos \theta d\theta$)

x	0	$\rightarrow$	1
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	0

これにより,

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \left(1 + 1 - \frac{1}{3} \right) - 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos \theta \cdot \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{5}{3} \pi - \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1 + \cos 2\theta) d\theta \\
 &= \frac{5}{3} \pi - \pi \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 \\
 &= \underline{\frac{5}{3} \pi - \frac{1}{2} \pi^2} \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$



6 $A(t, e^t)$ とすると, $y' = e^x$ より,
 $A(t, e^t)$ での $y = e^x$ における接線 l は

$$l: y = e^t(x - t) + e^t$$

$$\Leftrightarrow y = e^t x + e^t(1 - t) \quad \therefore B(t - 1, 0)$$

次に, 法線 m は

$$m: y = -\frac{1}{e^t}(x - t) + e^t$$

$$\Leftrightarrow x + e^t y = e^{2t} + t \quad \therefore C(e^{2t} + t, 0)$$

以上より,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}(e^{2t} + 1) \cdot e^t = 5$$

$$\Leftrightarrow e^{3t} + e^t = 10$$

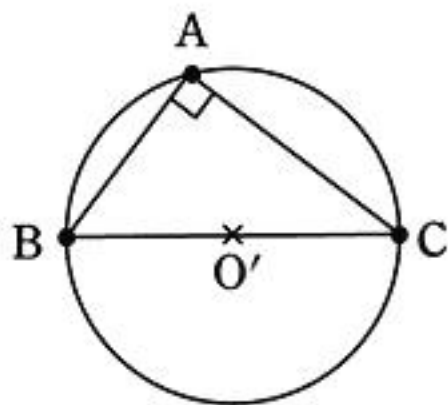
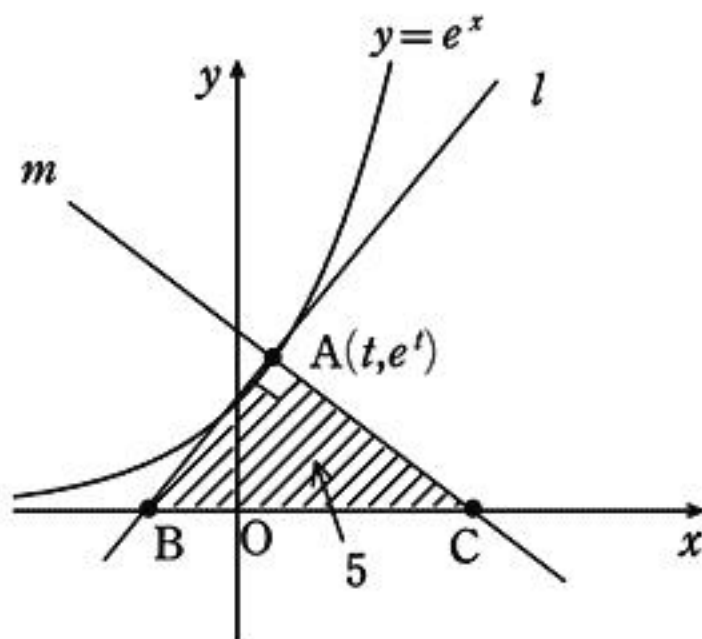
$$\Leftrightarrow (e^t - 2)(e^{2t} + 2e^t + 5) = 0$$

$$\therefore e^t = 2 \quad (\Leftrightarrow t = \log 2)$$

外心を O' とすると, O' は 2 点 B, C の中点より,

$$\begin{aligned} \frac{(t - 1) + (e^{2t} + t)}{2} &= \frac{1}{2}e^{2t} + t - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \log 2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} + \log 2 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{外心 } O' \left(\frac{3}{2} + \log 2, 0 \right) \quad \dots\dots(\text{答})$$



(1) $a_n = p, a_{n+1} = 2a_n$ より, 数列 $\{a_n\}$ は初項 p , 公比 2 の等比数列.

$$\underline{a_n = p \cdot 2^{n-1} \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots(\text{答})}$$

次に,

$$\begin{aligned} b_1 &= q, b_{n+1} - b_n = 3a_n \\ &= 3p \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

$n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} b_n &= q + \sum_{k=1}^{n-1} 3p \cdot 2^{k-1} \\ &= q + \frac{3p(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} \\ &= 3p \cdot 2^{n-1} + q - 3p \quad (n=1 \text{ をみたす}) \\ \therefore \underline{b_n = 3p \cdot 2^{n-1} + q - 3p \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots(\text{答})} \end{aligned}$$

$$(2) \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \text{ より, } \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{つまり, } A^n \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \cdot 2^n \\ 3p \cdot 2^n + q - 3p \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ここで, p と q は任意より, $(p, q) = (1, 0), (0, 1)$ について考える.

① を用いて,

$$\begin{cases} A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ 3 \cdot 2^n - 3 \end{pmatrix} \\ A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\therefore A^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 3 \cdot 2^n - 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \underline{A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 3(2^n - 1) & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(\text{答})}$$