$\boxed{1}$

(1) 1回じゃんけんをしたとき勝ち人数を X $(X=0,1,2,3)$

ちなみに $\underline{\underline{X=0\text{(あいこ)}}}$

$$P(X=1)=\frac{12}{3^4}=\frac{4}{27}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\cdot 3}{3^4}=\frac{6\cdot 3}{3^4}=\frac{6}{27}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_4C_3\cdot 3}{3^4}=\frac{4\cdot 3}{3^4}=\frac{4}{27}$$

$$\therefore P(X=0)=1-\{P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\}$$

$$=1-\left(\frac{4}{27}+\frac{6}{27}+\frac{4}{27}\right)=\frac{13}{27}$$

よって, 2回ともあいこになる確率は, $\underline{\left(\frac{13}{27}\right)^2}$ ……(答)

(2)
$$1-2a_{n+1}=1-2\cdot 2a_n(1-a_n)$$
$$=1-4a_n+4a_n{}^2$$
$$=(1-2a_n)^2 \quad \text{(証明終)}$$

これより,

$$1-2a_n=(1-2a_{n-1})^2=(1-2a_{n-2})^4=(1-2a_{n-3})^8$$
$$\vdots$$
$$=(1-2a_1)^{2^{n-1}} \qquad \therefore\ \underline{a_n=\frac{1}{2}\left(1-3^{2^{n-1}}\right)}$$ ……(答)

(3)
$$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|^2=4\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2$$
$$\Longleftrightarrow \left|\vec{a}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2=4\left|\vec{a}\right|^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2$$
$$\Longleftrightarrow \underline{\underline{\left|\vec{a}\right|^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}}}$$ ……①

ここで,

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{\frac{1}{4}\left|\vec{a}\right|^2}{\left|\vec{a}\right|\cdot\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|}=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ \underline{\theta=\frac{\pi}{3}}$$ ……(答)

$\boxed{2}$

(1) $f(x)=ax^3 \quad (a>0),\ f'(x)=3ax^2$

$g(x)=5\log x \quad (x>0),\ g'(x)=\dfrac{5}{x}$

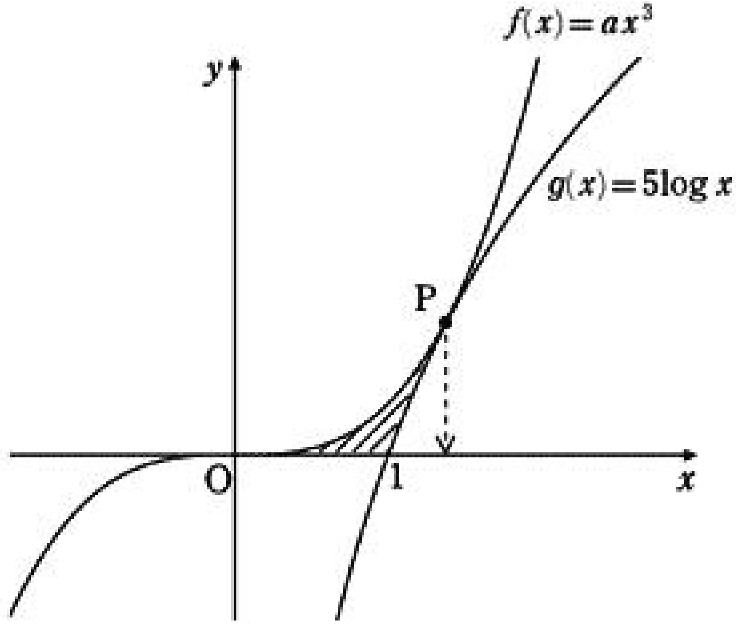
2 関数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の接点を P とおき，点 P の x 座標を $t\ (>0)$ とする．

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases} \iff \begin{cases} at^3=5\log t & \cdots\cdots ① \\ 3at^2=\dfrac{5}{t} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①と②を同時に満たす実数 t が存在するから，

$$5\log t=\frac{5}{3} \iff \log t=\frac{1}{3} \qquad \therefore\ t=e^{\frac{1}{3}}$$

つまり，$\underline{\mathrm{P}\left(e^{\frac{1}{3}},\ \dfrac{5}{3}\right),\ a=\dfrac{5}{3e}}$ ……(答)



(2) $$S=\int_0^{e^{\frac{1}{3}}}\frac{5}{3e}x^3dx-\int_1^{e^{\frac{1}{3}}}5\log x\,dx$$

$$=\frac{5}{12e}\Big[x^4\Big]_0^{e^{\frac{1}{3}}}-5\Big[x\log x-x\Big]_1^{e^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{5}{12e}\cdot e^{\frac{4}{3}}-5\left(\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}}-e^{\frac{1}{3}}+1\right)$$

$$=\frac{5}{12}e^{\frac{1}{3}}+\frac{10}{3}e^{\frac{1}{3}}-5$$

$$=\underline{\frac{15}{4}e^{\frac{1}{3}}-5} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$\boxed{3}$

(1) $x^3-3x^2+x=2x-3$

$\iff x^3-3x^2-x+3=0$

$\iff (x+1)(x-1)(x-3)=0 \qquad \therefore\ x=-1,1,3$

3 つの交点の座標は $\underline{(-1,-5),\ (1,-1),\ (3,3)}$ ……(答)

(2) B$(1,-1)$, C$(3,3)$, P(p,p^3-3p^2+p) (ただし, $1<p<3$)

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(2,4)$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(p-1,p^3-3p^2+p+1)$ より,

$$S=\frac{1}{2}\left|2(p^3-3p^2+p+1)-4(p-1)\right|$$

$$=\left|p^3-3p^2-p+3\right|$$

$$=\underline{-p^3+3p^2+p-3\ (1<p<3)}$$ ……(答)

(3) $S=S(p)=-p^3+3p^2+p-3\ (1<p<3)$ とする.

$S'(p)=-3p^2+6p+1$ より, $p=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$ で $S'(p)=0$

増減表を描くと次の通り.

p	(1)	…	$\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$	…	(3)
$S'(p)$		$+$	0	$-$	
$S(p)$		↗	(最大)	↘	

$p=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$ (……(答)) で $S(p)$ は最大となる. ($-3p^2+6p+1=0$ に注意)

$S(p)=(-3p^2+6p+1)\left(\dfrac{1}{3}p-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{8}{3}(p-1)$ より,

$$(\text{最大値})=S\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{8}{3}\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}-1\right)=\underline{\frac{16\sqrt{3}}{9}}$$ ……(答)