

(1)

Cは線分AB上の点なので、

$$AB = AC + CB$$

である。よって

$$AC^2 = AB \cdot CB$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = (AC + CB) \cdot CB \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 $CB=0$ のとき、 $\textcircled{1}$ の等式を満たすためには $AC=0$ が必要となるが、

$$AB = AC + CB = 0 + 0 = 0$$

となり、線分ABが長さを持たなくなるので不適。よって $CB \neq 0$ 。

$$\frac{AC}{CB} = \alpha$$

とおくと、(但し $\alpha > 0$)

$$AC = \alpha CB$$

となる。これを $\textcircled{1}$ に代入して、

$$(\alpha CB)^2 = (\alpha CB + CB) \cdot CB$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = (\alpha + 1) \cdot 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

となる。 $\alpha > 0$ より、

$$\frac{AC}{CB} = \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

を得る。

$$(\text{答}) \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(2)

$\textcircled{2}$ より、

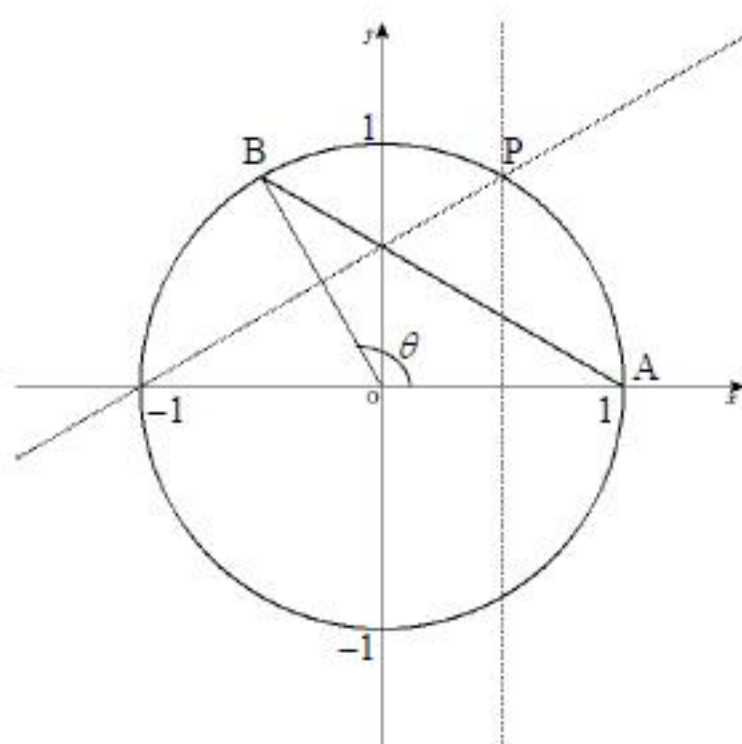
$$\alpha^2 = \alpha + 1$$

であるから、両辺に α^{n-1} をかけることで、任意の自然数 n に対しての等式

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n + \alpha^{n-1}$$

を得る。

Q.E.D.



(1)

辺 OA の垂直二等分線の方程式は,

$$x = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

であり, また辺 OB の傾きは $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, 中点は $\left(\frac{\cos \theta}{2}, \frac{\sin \theta}{2}\right)$ であるから, 辺 OB の垂直二等分線の方程式は,

$$y - \frac{\sin \theta}{2} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left(x - \frac{\cos \theta}{2}\right) \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①と②の交点が求める外心 P であるから, $P(X, Y)$ とおくと, $X = \frac{1}{2}$ で,

$$\begin{aligned} Y - \frac{\sin \theta}{2} &= -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos \theta}{2}\right) \\ \therefore Y &= -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos \theta}{2}\right) + \frac{\sin \theta}{2} \\ &= \frac{1}{2 \sin \theta} (\cos^2 \theta - \cos \theta + \sin^2 \theta) \\ &= \frac{1}{2 \sin \theta} (1 - \cos \theta) \\ &= \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \quad (\because \text{半角公式}) \\ &= \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \quad (\because \text{倍角公式}) \\ &= \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P \left(\frac{1}{2}, \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{2} \right)$$

(2)

点 P が円 C の円周上にある条件は,

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow Y^2 &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となるが,

$$0 < \theta < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$$

であるから,

$$Y = \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{2} > 0$$

より, 求める条件は

$$\begin{aligned} Y &= \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow \tan \frac{\theta}{2} &= \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} &= \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{2}{3} \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{2}{3} \pi$$

3

α が $0 \leq \alpha \leq \pi$ の範囲を動くとき、 $\cos \alpha$ は $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ の範囲の全ての値をとりうる。

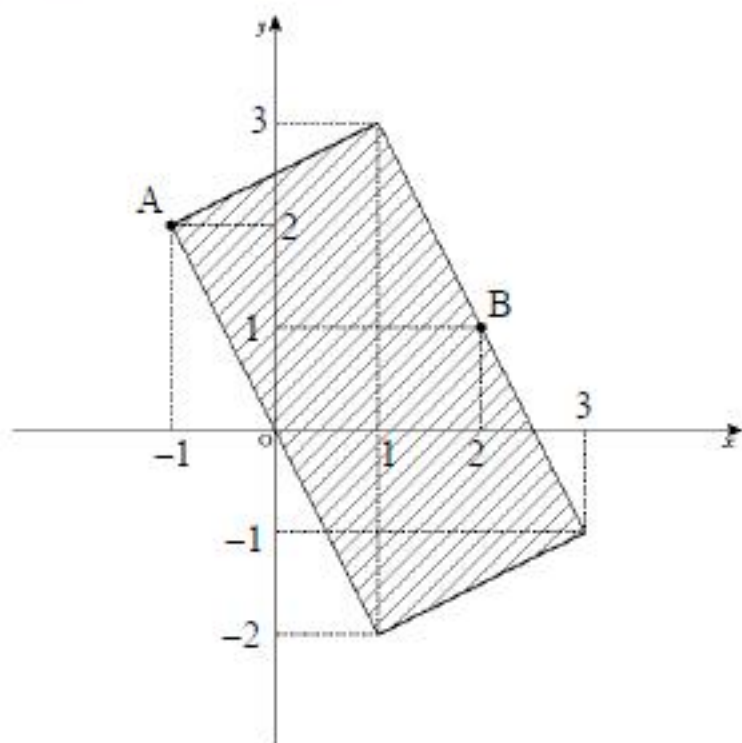
β が $0 \leq \beta \leq \pi$ の範囲を動くとき、 $\sin \beta$ は $0 \leq \sin \beta \leq 1$ の範囲の全ての値をとりうる。

$-\overrightarrow{OA} = (1, -2)$ より、

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (1, 3)$$

$$-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (3, -1)$$

となるから、点 P の存在範囲は下図の斜線部である。(但し境界を含む)



(答)前図の斜線部(但し境界を含む)

(1)

2本の接線の放物線との接点を $A(a, (a-1)^2 + q)$, $B(b, (b-1)^2 + q)$ とおく。

$$y = (x-1)^2 + q$$

のとき、

$$y' = 2x - 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

なので、 A, B それぞれを通る放物線の接線の方程式は、

$$\begin{cases} y - ((a-1)^2 + q) = (2a-2)(x-a) \\ y - ((b-1)^2 + q) = (2b-2)(x-b) \end{cases}$$

となり、これらがともに原点 O を通るので、

$$\begin{cases} -((a-1)^2 + q) = (2a-2)(-a) \\ -((b-1)^2 + q) = (2b-2)(-b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = a^2 - 1 \\ q = b^2 - 1 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{2}$$

を満たす。一方、2本の接線が直交することから、

$$(2a-2)(2b-2) = -1$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{-1}{4a-4} + 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。これと②より、

$$\begin{cases} q = a^2 - 1 \\ a^2 - 1 = \left(\frac{-1}{4a-4} + 1 \right)^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = a^2 - 1 \\ a^2 = \left(\frac{4a-5}{4a-4} \right)^2 \end{cases}$$

となる。ここで、 $4a-4 \neq 0$ より $a \neq 1$ である。

[1] $a = \frac{4a-5}{4a-4}$ のとき、

$$a(4a-4) = 4a-5$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 8a + 5 = 0$$

となるが、これを満たす a は存在しない。

[2] $a = -\left(\frac{4a-5}{4a-4} \right)$ のとき、

$$-a(4a-4) = 4a-5$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{5}{4}$$

となる。これは $a \neq 1$ をみたす。

以上より、

$$a^2 = \frac{5}{4}$$

であるから、②より、

$$q = a^2 - 1 = \frac{1}{4}$$

を得る。

(答) $\frac{1}{4}$

(2)

$$a = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

とすると、③より、

$$b = \frac{-1}{4\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) - 4} + 1$$

$$= \frac{-1(2\sqrt{5}+4)}{(2\sqrt{5}-4)(2\sqrt{5}+4)} + 1$$

$$= \frac{-(2\sqrt{5}+4)}{4} + 1$$

$$= \frac{-\sqrt{5}}{2}$$

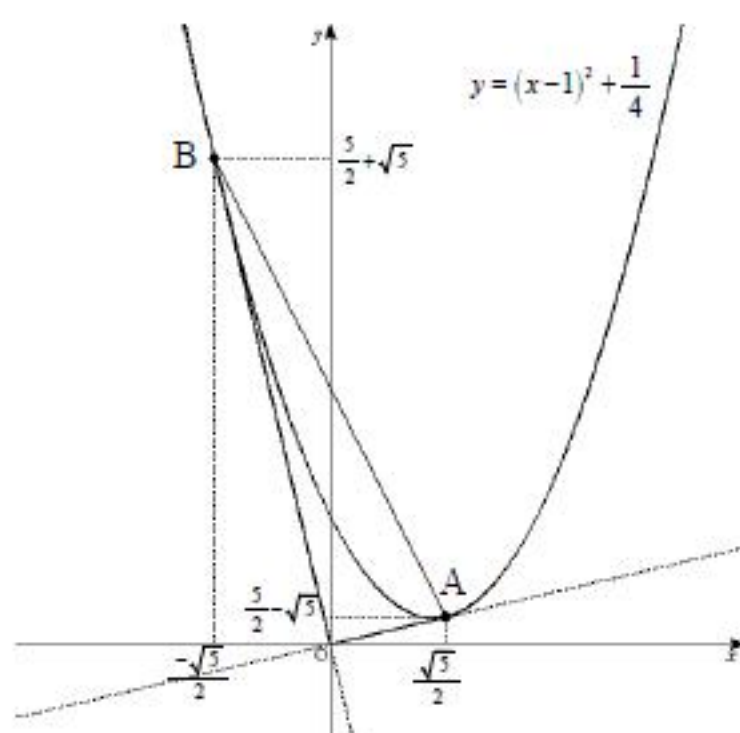
となる。よって

$$A\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \left(\frac{\sqrt{5}}{2}-1\right)^2 + \frac{1}{4}\right), B\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}-1\right)^2 + \frac{1}{4}\right)$$

となり、整理すると、

$$A\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{5}{2} - \sqrt{5}\right), B\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{5}{2} + \sqrt{5}\right)$$

となる。



直線 OA の傾きは、①より、

$$2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} - 2 = \sqrt{5} - 2$$

であるから、直線 OA の方程式は、

$$y = (\sqrt{5} - 2)x$$

となり、直線 OB の方程式も同様に

$$y = (-\sqrt{5} - 2)x$$

となる。よって、

$$S_1 = \int_{-\frac{\sqrt{5}}{2}}^0 \left\{ (x-1)^2 + \frac{1}{4} - (-\sqrt{5}-2)x \right\} dx + \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \left\{ (x-1)^2 + \frac{1}{4} - (\sqrt{5}-2)x \right\} dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{\sqrt{5}}{2}x^2 + \frac{5}{4}x \right]_{-\frac{\sqrt{5}}{2}}^0 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{\sqrt{5}}{2}x^2 + \frac{5}{4}x \right]_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{12}$$

である。一方、

$$S_2 = \frac{1}{2} \left| \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{5}{2} + \sqrt{5} \right) - \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{5}{2} - \sqrt{5} \right) \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 5 \right|$$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

となる。よって、

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{5\sqrt{5}}{4}}{\frac{5\sqrt{5}}{12}} = 3$$

である。

(答) 3