

(1)

$\triangle OAB$ の外心Pは、線分OAの垂直二等分線と線分OBの垂直二等分線との交点である。線分OAの垂直二等分線は $x = \frac{1}{2}$ であるので、点Pのx座標は $\frac{1}{2}$ となる。また、 $\triangle OAB$ は二等辺三角形なので、点Aと点Bは直線OPに関して対称の位置にあり、点Pの偏角は $\frac{1}{2}\theta$ となる。よって点Pの座標は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}\right)$ となる。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

(2)

点Pが円 $C: x^2 + y^2 = 1$ 上にあるので、(1)で求めた座標を代入すると

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \tan^2\frac{\theta}{2} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = 4$$

$$\therefore \cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \quad (\because 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2})$$

となる。これを $0 < \theta < \pi$ の範囲で解くと $\theta = \frac{2}{3}\pi$ となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3}\pi$$

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq a_3 & \cdots \textcircled{1} \\ a_1 + a_2 + a_3 = a_1 a_2 a_3 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

とおく。①, ②の両辺を  $a_1 a_2 a_3$  で割ると

$$\frac{1}{a_2 a_3} \leq \frac{1}{a_3 a_1} \leq \frac{1}{a_1 a_2}, \quad \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} = 1$$

を得る。よって、この2つの式を組み合わせると

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} \\ &\leq \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2} \\ &= \frac{3}{a_1 a_2} \end{aligned}$$

を得る。これより  $a_1 a_2 \leq 3$  である。これをみたすのは

$$(a_1, a_2) = (1, 1), (1, 2), (1, 3)$$

の3通りである。

[1]  $(a_1, a_2) = (1, 1)$  のとき

これを②に代入すると  $2 + a_3 = a_3$  となり、矛盾する。

[2]  $(a_1, a_2) = (1, 2)$  のとき

これを②に代入すると  $a_3 = 3$  となる。逆に  $(a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 3)$  は①, ②をみたす。

[3]  $(a_1, a_2) = (1, 3)$  のとき

これを②に代入すると  $a_3 = 2$  となり、①に反するので、適さない。

[1][2][3]より、 $(a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 3)$  となる。

(答)  $(a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 3)$