

(1)

まず、行列 P の行列式 $|P|$ を計算すると

$$\begin{aligned} |P| &= 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となり、これは 0 でないから行列 P は逆行列 P^{-1} をもつことがわかる。ここで、逆行列 P^{-1} を計算すると

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

より

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

となるので

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^n - 2^n & -5^n + 2^n \\ 2 \cdot 5^n - 2^{n+1} & -5^n + 2^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^n - 2^n & -5^n + 2^n \\ 2 \cdot 5^n - 2^{n+1} & -5^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} f(x) dx &= \int_0^{\pi} x \sin x dx \\
 &= \left[x(-\cos x) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \\
 &= \pi + \left[\sin x \right]_0^{\pi} \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

となる。

(答) π

(2)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \sin x + x \cos x \\
 &= \sqrt{x^2 + 1} \sin(x + \alpha) \\
 &\leq \sqrt{x^2 + 1}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 α は、 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ 、 $\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ を満たす角である。一方、

$\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ において

$$\sin x < \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad x \cos x < x \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

であるので $f'(x)$ の最大値は

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

の範囲にあることが分かる。直径 1 の円周の長さ、すなわち π は、その円に外接する正方形の周よりも短いことから、 $\pi < 4$ であり、したがって、 $\textcircled{1}$ の範囲において、

$$\sqrt{x^2 + 1} \leq \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 1} < \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{21}{4}} < \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

となり、 $f'(x) < \frac{5}{2}$ が成り立つ。

(証明終)