

1

(1)

不等式 $\log_3(x-2) + 2\log_9(x-4) < 1$ を解く。

まず、真数条件より、

$$x-2 > 0 \text{ かつ } x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$$

である。この条件のもとで、上の不等式を変形していくと、

$$\log_3(x-2) + 2 \cdot \frac{\log_3(x-4)}{\log_3 9} < 1 \quad (\because \text{底の変換公式})$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x-2)(x-4) < \log_3 3$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-4) < 3 \quad (\because f(x) = \log_3 x \text{ は単調増加関数})$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 < 0$$

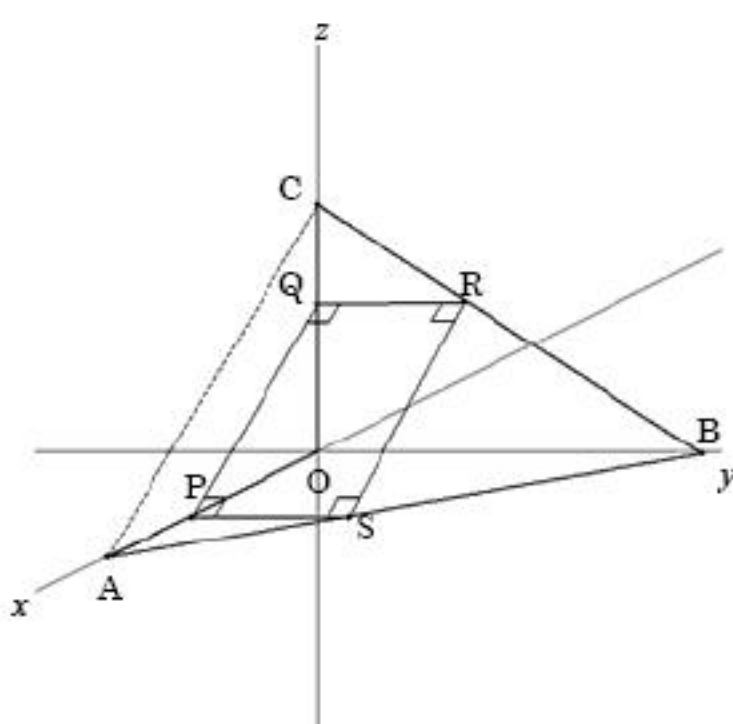
$$\Leftrightarrow (x-5)(x-1) < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < x < 5$$

となる。真数条件とあわせて、求める解は $4 < x < 5$ となる。

(答) $4 < x < 5$

(2)



$\triangle OCA \sim \triangle OQP$ であり、相似比は $1:t$ であるから、 $QP = tCA = \sqrt{2}t$ である。また、 $\triangle COB \sim \triangle CQR$ であり、相似比は $1:1-t$ であるから、 $QR = (1-t)OB = \sqrt{6}(1-t)$ である。したがって、長方形 PQRS の面積は、

$$M(t) = \sqrt{12}t(1-t) = -2\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから、長方形の面積は、 $t = \frac{1}{2}$ のときに最大となる。このとき、 $QP:RQ = 1:\sqrt{3}$ となるから、長方形 PQRS の対角線の交点を T とすると、 $\triangle TQP$ は正三角形である。したがって求める角 θ は、 $\frac{\pi}{3}$ となる。

(答) $\frac{\pi}{3}$

(3)

3つのサイコロを区別して考える。目の出方の総数は、 $6^3 = 216$ 通りであり、これらは同様に確からしく起こる。

目の積が 10 の倍数になる

$\Leftrightarrow$ 目の積が 2 の倍数になる、かつ目の積が 5 の倍数になる

であるから、

目の積が 10 の倍数にならない

$\Leftrightarrow$ 目の積が 2 の倍数にならない、または目の積が 5 の倍数にならない

$\Leftrightarrow$ どのサイコロの目も 2 の倍数でない、またはどのサイコロの目も 5 の倍数でない

となる。

[1] どのサイコロの目も 2 の倍数でないような目の出方の場合の数

どのサイコロも 1, 3, 5 が出るから $3^3 = 27$ 通りである。

[2] どのサイコロの目も 5 の倍数でないような目の出方の場合の数

どのサイコロも 1, 2, 3, 4, 6 が出るから $5^3 = 125$ 通りである。

[3] どのサイコロの目も 5 の倍数でない、かつ 2 の倍数でないような目の出方の場合の数

どのサイコロも 1, 3 が出るから $2^3 = 8$ 通りである。

したがって [1], [2], [3] より、目の積が 10 の倍数にならないような目の出方の場合の数は、

$$27 + 125 - 8 = 144 \text{通り}$$

である。したがって求める確率は、

$$\frac{216 - 144}{216} = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$$

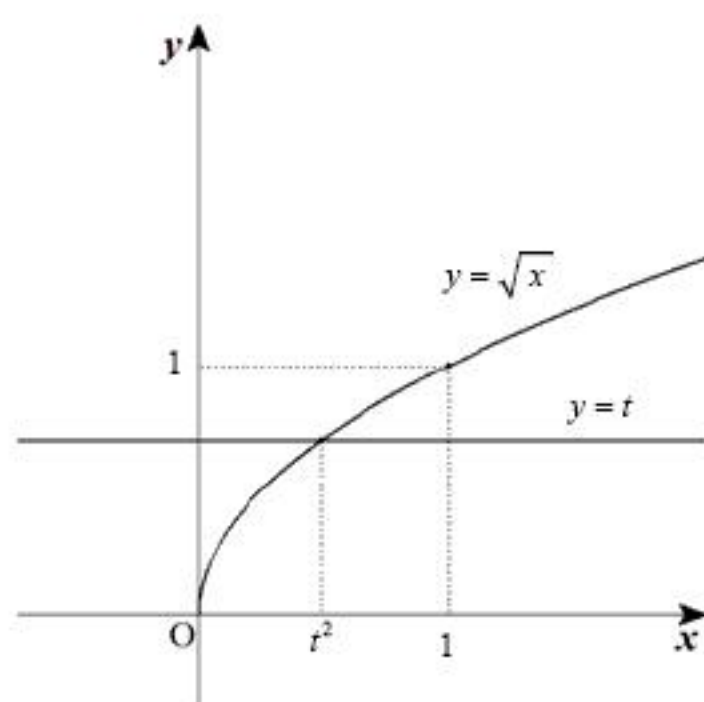
である。

(答) $\frac{1}{3}$

2

(1)

まず、被積分関数の絶対値をはずすことを考える。



上図より、 $0 \leq x \leq t^2$ では $\sqrt{x} \leq t$ となり、 $t^2 \leq x \leq 1$ では $t \leq \sqrt{x}$ となるから、

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int_0^1 |\sqrt{x} - t| dx + t^2 \\
 &= \int_0^{t^2} (t - \sqrt{x}) dx + \int_{t^2}^1 (\sqrt{x} - t) dx + t^2 \\
 &= \left[tx - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{t^2} + \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - tx \right]_{t^2}^1 + t^2 \\
 &= \left(t^3 - \frac{2}{3} t^3 \right) - (0 - 0) + \left(\frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} - t \right) - \left(\frac{2}{3} t^3 - t^3 \right) + t^2 \\
 &= \frac{2}{3} t^3 + t^2 - t + \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(t) = \frac{2}{3} t^3 + t^2 - t + \frac{2}{3}$$

(2)

$0 \leq t \leq 1$ の範囲で、 $f(t) = \frac{2}{3} t^3 + t^2 - t + \frac{2}{3}$ の最小値を求める。この関数を微分すると、

$$f'(t) = 2t^2 + 2t - 1 = 2 \left(t - \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \right) \left(t - \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \right)$$

となる。ここで、 $\frac{-1 - \sqrt{3}}{2} < 0 < \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} < 1$ であることに注意すると、増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$	...	1
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		$\searrow$	最小値	$\nearrow$	

$\frac{-1 + \sqrt{3}}{2} = \alpha$ とおく。このとき、

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$$

なる関係式が成立することに注意すると、

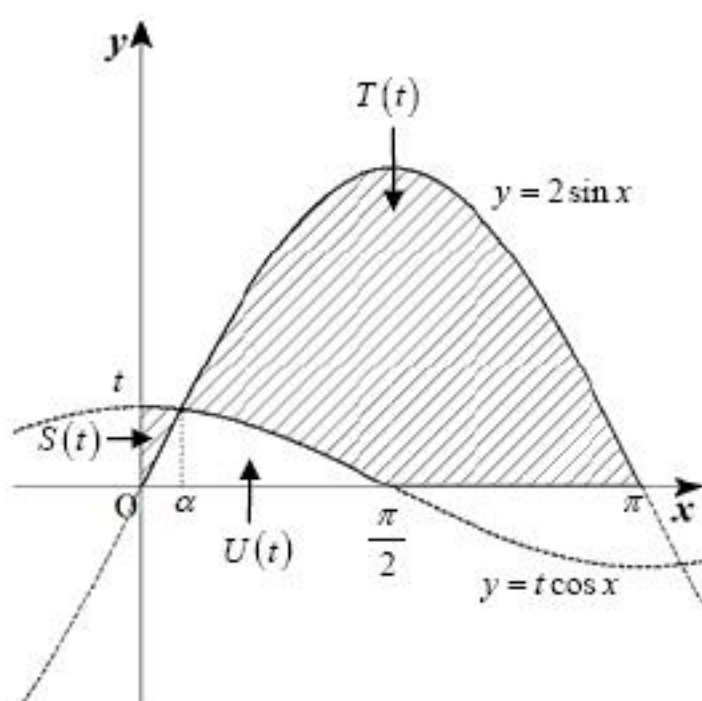
$$\begin{aligned}
 f(\alpha) &= \frac{2}{3} \alpha^3 + \alpha^2 - \alpha + \frac{2}{3} \\
 &= \left(\frac{1}{3} \alpha + \frac{1}{6} \right) (2\alpha^2 + 2\alpha - 1) - \alpha + \frac{5}{6} \\
 &= -\alpha + \frac{5}{6} \\
 &= \frac{8 - 3\sqrt{3}}{6}
 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{8 - 3\sqrt{3}}{6}$$

3

(1)



上図より, 2 曲線 C_1, C_2 はただ 1 つ交点をもつ。この交点の x 座標 α は,

$$t \cos \alpha = 2 \sin \alpha \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす。また, $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ を満たすから, $\textcircled{1}$ と連立して,

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} \\ \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{t^2 + 4}} \end{cases} \quad (\because \sin \alpha > 0 \text{ かつ } t > 0)$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \sin \alpha = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}}, \quad \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{t^2 + 4}}$$

(2)

$S(t), T(t)$ はそれぞれ上図の斜線部の面積である。よって $S(t)$ は,

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^{\alpha} (t \cos x - 2 \sin x) dx \\ &= [t \sin x + 2 \cos x]_0^{\alpha} \\ &= t \sin \alpha + 2 \cos \alpha - 2 \\ &= t \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{t^2 + 4}} - 2 \\ &= \sqrt{t^2 + 4} - 2 \end{aligned}$$

と求まる。また, 上図のように 2 曲線 C_1, C_2 と $y = 0$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) で囲まれる部分の面積を

$U(t)$ とおくと,

$$\begin{cases} S(t) + U(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos x dx = t \\ T(t) + U(t) = \int_0^{\pi} 2 \sin x dx = 4 \end{cases}$$

であるから,

$$T(t) - S(t) = 4 - t$$

となり, したがって,

$$\begin{aligned} T(t) &= S(t) + 4 - t \\ &= \sqrt{t^2 + 4} + 2 - t \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S(t) = \sqrt{t^2 + 4} - 2, \quad T(t) = \sqrt{t^2 + 4} + 2 - t$$

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{t^2 T(t)}{S(t)} &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{t^2 (\sqrt{t^2 + 4} + 2 - t)}{\sqrt{t^2 + 4} - 2} \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{t^2 (\sqrt{t^2 + 4} + 2 - t) (\sqrt{t^2 + 4} + 2)}{(\sqrt{t^2 + 4} - 2) (\sqrt{t^2 + 4} + 2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{t^2 (\sqrt{t^2 + 4} + 2 - t) (\sqrt{t^2 + 4} + 2)}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} (\sqrt{t^2 + 4} + 2 - t) (\sqrt{t^2 + 4} + 2) \\ &= (\sqrt{0 + 4} + 2 - 0) (\sqrt{0 + 4} + 2) \\ &= 16 \end{aligned}$$

(答) 16

(1)

すべての自然数 k に対して $A^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$ が成り立つことを、数学的帰納法を用いて示す。

[1] $k=1$ のとき

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos 1 \cdot \theta & \sin 1 \cdot \theta \\ -\sin 1 \cdot \theta & \cos 1 \cdot \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

となる。よって成立する。

[2] $k=m$ のとき

$$A^m = \begin{pmatrix} \cos m\theta & \sin m\theta \\ -\sin m\theta & \cos m\theta \end{pmatrix} \text{ が成立すると仮定する。}$$

$$\begin{aligned} A^{m+1} &= \begin{pmatrix} \cos m\theta & \sin m\theta \\ -\sin m\theta & \cos m\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos m\theta \cos \theta - \sin m\theta \sin \theta & \cos m\theta \sin \theta + \sin m\theta \cos \theta \\ -\sin m\theta \cos \theta - \cos m\theta \sin \theta & -\sin m\theta \sin \theta + \cos m\theta \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(m+1)\theta & \sin(m+1)\theta \\ -\sin(m+1)\theta & \cos(m+1)\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

($\because$ 三角関数の加法定理より)

となるから、 $k=m+1$ のときも成立する。

したがって [1], [2] より、すべての自然数 k に対して $A^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$ が成り立つことが数学的帰納法によって示された。

(証明終)

(2)

$AB = B + E - A$ であることを示す。

$B = A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ より、

$$(\text{左辺}) = AB = A(A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) = A^2 + A^3 + \cdots + A^n$$

$$(\text{右辺}) = B + E - A = (A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) + E - A = A^2 + A^3 + \cdots + A^{n-1} + E$$

となる。

ここで、 $\theta = \frac{2\pi}{n}$ であるから、(1) より、

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi & \sin 2\pi \\ -\sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

となる。したがって (左辺) = (右辺) が示された。

(証明終)

(3)

(2) より、

$$\begin{aligned} AB &= B + E - A \\ \Leftrightarrow A(B + E) &= B + E \\ \Leftrightarrow (A - E)(B + E) &= O \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $A - E = \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta - 1 \end{pmatrix}$ より、

$$\Delta(A - E) = (\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta = 2(1 - \cos \theta)$$

となるが、 $0 < \theta = \frac{2\pi}{n} < 2\pi$ より、 $\cos \theta \neq 1$ であるから、 $\Delta(A - E) \neq 0$ である。したがって、

$A - E$ の逆行列が存在するから、 $\textcircled{1}$ の両辺に左から $A - E$ の逆行列をかけることによって、

$$\begin{aligned} (A - E)^{-1}(A - E)(B + E) &= (A - E)^{-1}O \\ \Leftrightarrow B + E &= O \end{aligned}$$

が示された。よって、

$$B = -E$$

となる。

(証明終)