

$$\begin{aligned}
& \left| \vec{a}_n + \vec{b}_n \right|^2 \\
&= \left| \vec{a}_n \right|^2 + \left| \vec{b}_n \right|^2 + 2\vec{a}_n \cdot \vec{b}_n \\
&= \left(\cos^2 \frac{n\pi}{4} + \sin^2 \frac{n\pi}{4} \right) + 4 \left(\cos^2 \frac{n\pi}{6} + \sin^2 \frac{n\pi}{6} \right) + 4 \left(\cos \frac{n\pi}{4} \cos \frac{n\pi}{6} + \sin \frac{n\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{6} \right) \\
&= 5 + 4 \left(\cos \frac{n\pi}{4} \cos \frac{n\pi}{6} + \sin \frac{n\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{6} \right) \\
&= 5 + 4 \cos \left(\frac{n\pi}{4} - \frac{n\pi}{6} \right) \\
&= 5 + 4 \cos \frac{n\pi}{12}
\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{12} \left| \vec{a}_n + \vec{b}_n \right|^2 &= \sum_{n=0}^{12} \left(5 + 4 \cos \frac{n\pi}{12} \right) \\
&= 5 \cdot 13 + 4 \sum_{n=0}^{12} \cos \frac{n\pi}{12} \\
&= 65 + 4 \sum_{n=0}^{12} \cos \frac{n\pi}{12}
\end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\cos \frac{n\pi}{12} = -\cos \left(\pi - \frac{n\pi}{12} \right) = -\cos \frac{(12-n)\pi}{12}$$

であることを用いると,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{12} \cos \frac{n\pi}{12} &= \sum_{n=0}^5 \cos \frac{n\pi}{12} + \cos \frac{6\pi}{12} + \sum_{n=7}^{12} \cos \frac{n\pi}{12} \\
&= \sum_{n=0}^5 \cos \frac{n\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^5 \cos \frac{(12-n)\pi}{12} \\
&= \sum_{n=0}^5 \cos \frac{n\pi}{12} + 0 - \sum_{n=0}^5 \cos \frac{n\pi}{12} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる。以上より,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{12} \left| \vec{a}_n + \vec{b}_n \right|^2 &= 65 + 4 \sum_{n=0}^{12} \cos \frac{n\pi}{12} \\
&= 65
\end{aligned}$$

となる。

2

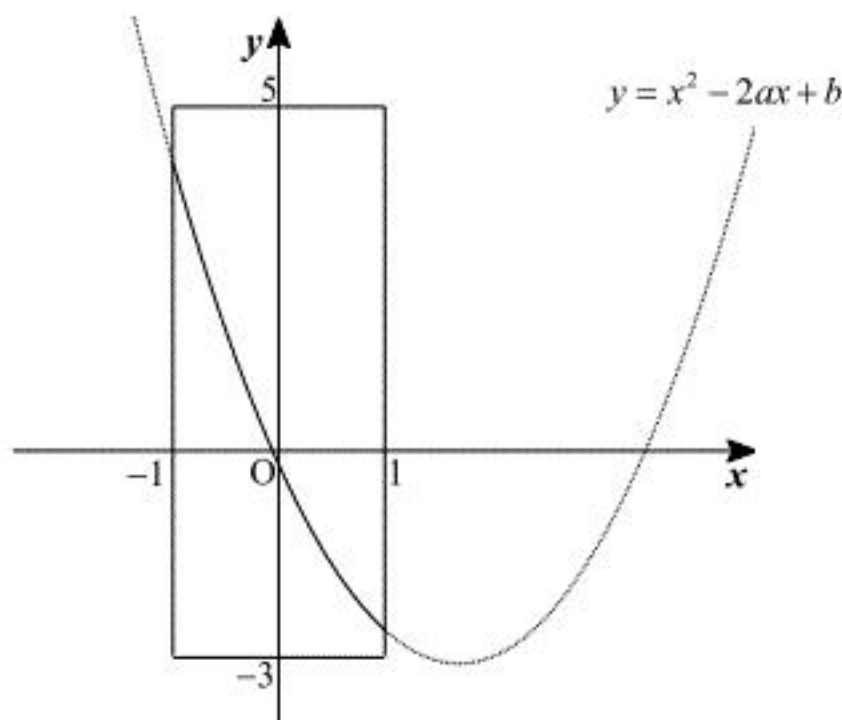
(1)

$$f(x) = x^2 - 2ax + b$$

$$= (x-a)^2 + b - a^2$$

とおく。曲線 $f(x)$ は軸 $x=a$ で、下に凸の 2 次関数となる。よって、以下のように a の値によって場合分けを行う。

[1] $a \geq 1$ のとき



上図より、

$$「f(1) \geq -3」 \text{ かつ } 「f(-1) \leq 5」$$

が条件であることがわかる。よって、

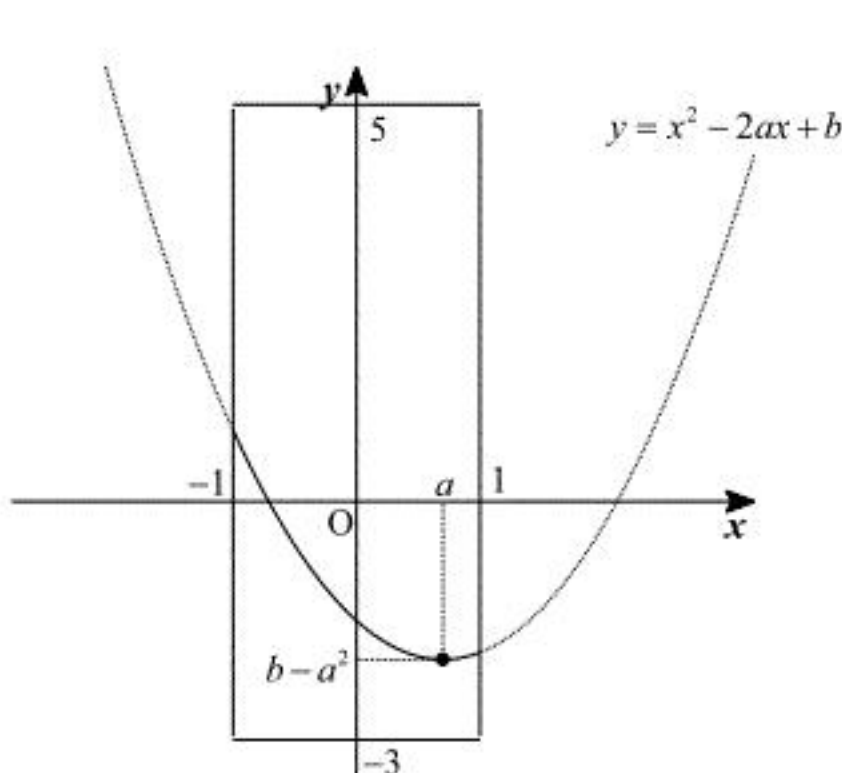
$$「f(1) \geq -3」 \text{ かつ } 「f(-1) \leq 5」$$

$$\Leftrightarrow 「1-2a+b \geq -3」 \text{ かつ } 「1+2a+b \leq 5」$$

$$\Leftrightarrow 「b \geq 2a-4」 \text{ かつ } 「b \leq -2a+4」$$

となる。

[2] $0 < a < 1$ のとき



上図より、

$$「f(a) > -3」 \text{ かつ } 「f(-1) \leq 5」$$

が条件であることがわかる。よって、

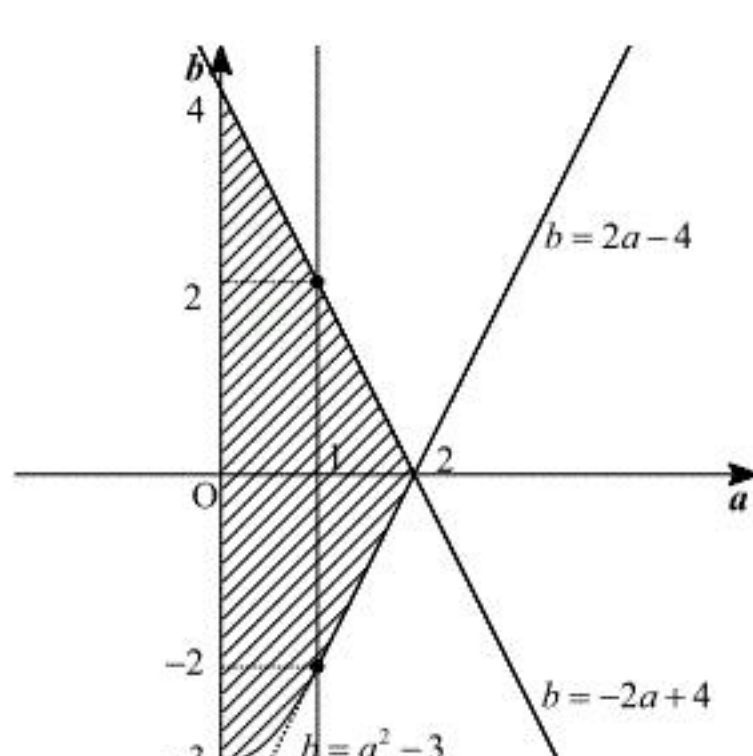
$$「f(a) > -3」 \text{ かつ } 「f(-1) \leq 5」$$

$$\Leftrightarrow 「b-a^2 > -3」 \text{ かつ } 「1+2a+b \leq 5」$$

$$\Leftrightarrow 「b > a^2-3」 \text{ かつ } 「b \leq -2a+4」$$

となる。

以上, [1], [2] より, 条件を満たす (a, b) が動きうる領域は以下になる。



ただし、境界線は $a=0$ ($-3 \leq b \leq 4$) と $b=a^2-3$ ($0 < a < 1$) を含まず、その他の部分を含む。

(答) 前図

(2)

与えられた条件より、 $-1 < x < 1$ の範囲では、

$$x^2 - 2ax + b > -3$$

が成立している。したがって、求める面積 S は

$$S = \int_0^1 \{(x^2 - 2ax + b) - (-3)\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (b+3)x \right]_0^1$$

$$= -a + b + \frac{10}{3}$$

となる。

(答) $S = -a + b + \frac{10}{3}$

(3)

(2)の結果より、

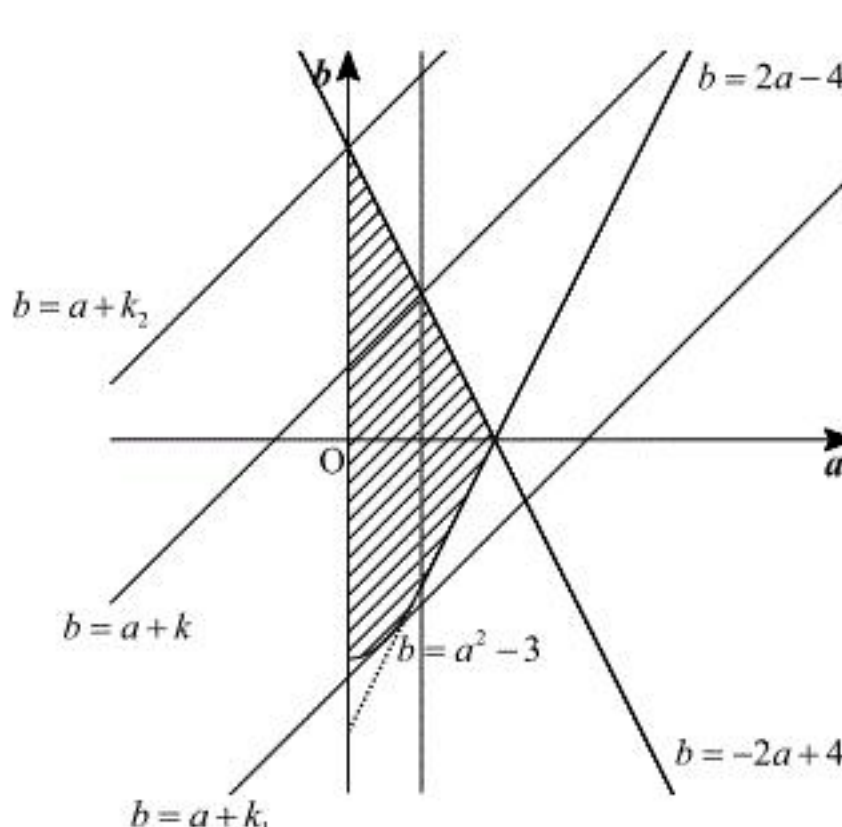
$$S = -a + b + \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow b = a + S - \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow b = a + k$$

となる。ただし、 $k = S - \frac{10}{3}$ とおいた。直線 $b = a + k$ が(1)で求めた領域と共有点をもつときの

k の取りうる値の範囲を求める。この 2 つの図形が共有点をもつときの位置関係は以下の通りとなる。



図のように k_1, k_2 をおき、(1)で求めた境界線の条件に注意すると、 k のとりうる範囲は

$$k_1 < k = S - \frac{10}{3} < k_2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで、直線 $b = a + k_1$ は放物線 $b = a^2 - 3$ の接線である。 $b = a^2 - 3$ を a で微分すると

$$b' = 2a$$

となるため、 $b' = 1$ とすると

$$b' = 1$$

$$\Leftrightarrow 2a = 1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

となる。これは、 $0 < a < 1$ を満たしている。よって、直線 $b = a + k_1$ と放物線 $b = a^2 - 3$ の接点の

座標は $\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$ となる。 $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$ を式 $b = a + k_1$ に代入すると、

$$-\frac{11}{4} = \frac{1}{2} + k_1$$

$$\therefore k_1 = -\frac{13}{4}$$

となる。また、直線 $b = a + k_2$ は図より点 $(0, 4)$ を通るから、 $k_2 = 4$ である。したがって①より、

$$-\frac{13}{4} < S - \frac{10}{3} < 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{12} < S < \frac{22}{3}$$

となる。

(答) $\frac{1}{12} < S < \frac{22}{3}$