

$$\begin{aligned}
& \left| \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{b_n} \right|^2 \\
&= \left| \overrightarrow{a_n} \right|^2 + \left| \overrightarrow{b_n} \right|^2 + 2\overrightarrow{a_n} \cdot \overrightarrow{b_n} \\
&= \left(\cos^2 \frac{n\pi}{4} + \sin^2 \frac{n\pi}{4} \right) + 4 \left(\cos^2 \frac{n\pi}{6} + \sin^2 \frac{n\pi}{6} \right) + 4 \left(\cos \frac{n\pi}{4} \cos \frac{n\pi}{6} + \sin \frac{n\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{6} \right) \\
&= 5 + 4 \left(\cos \frac{n\pi}{4} \cos \frac{n\pi}{6} + \sin \frac{n\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{6} \right) \\
&= 5 + 4 \cos \left(\frac{n\pi}{4} - \frac{n\pi}{6} \right) \\
&= 5 + 4 \cos \frac{n\pi}{12}
\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{12} \left| \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{b_n} \right|^2 &= \sum_{n=0}^{12} \left(5 + 4 \cos \frac{n\pi}{12} \right) \\
&= 5 \cdot 13 + 4 \sum_{n=0}^{12} \cos \frac{n\pi}{12} \\
&= 65 + 4 \sum_{n=0}^{12} \cos \frac{n\pi}{12}
\end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\cos \frac{n\pi}{12} = -\cos \left(\pi - \frac{n\pi}{12} \right) = -\cos \frac{(12-n)\pi}{12}$$

であることを用いると,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{12} \cos \frac{n\pi}{12} &= \sum_{n=0}^5 \cos \frac{n\pi}{12} + \cos \frac{6\pi}{12} + \sum_{n=7}^{12} \cos \frac{n\pi}{12} \\
&= \sum_{n=0}^5 \cos \frac{n\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^5 \cos \frac{(12-n)\pi}{12} \\
&= \sum_{n=0}^5 \cos \frac{n\pi}{12} + 0 - \sum_{n=0}^5 \cos \frac{n\pi}{12} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる。以上より,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{12} \left| \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{b_n} \right|^2 &= 65 + 4 \sum_{n=0}^{12} \cos \frac{n\pi}{12} \\
&= 65
\end{aligned}$$

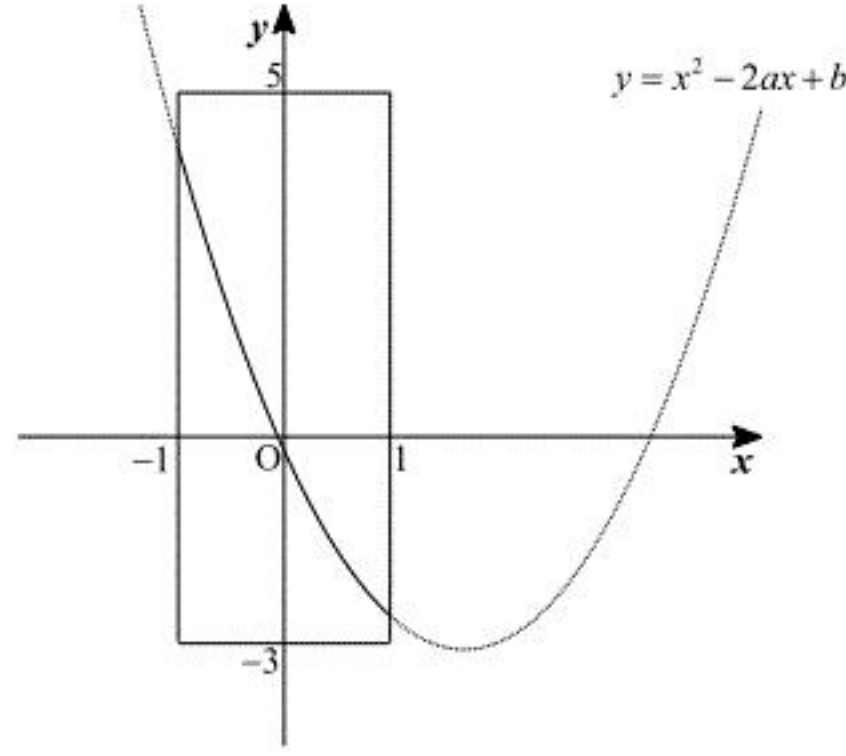
となる。

(1)

$$f(x) = x^2 - 2ax + b$$

$$= (x-a)^2 + b - a^2$$

とおく。曲線 $f(x)$ は軸 $x=a$ で、下に凸の 2 次関数となる。よって、以下のように a の値によって場合分けを行う。

[1] $a \geq 1$ のとき

上図より、

$$「f(1) \geq -3」 \text{ かつ } 「f(-1) \leq 5」$$

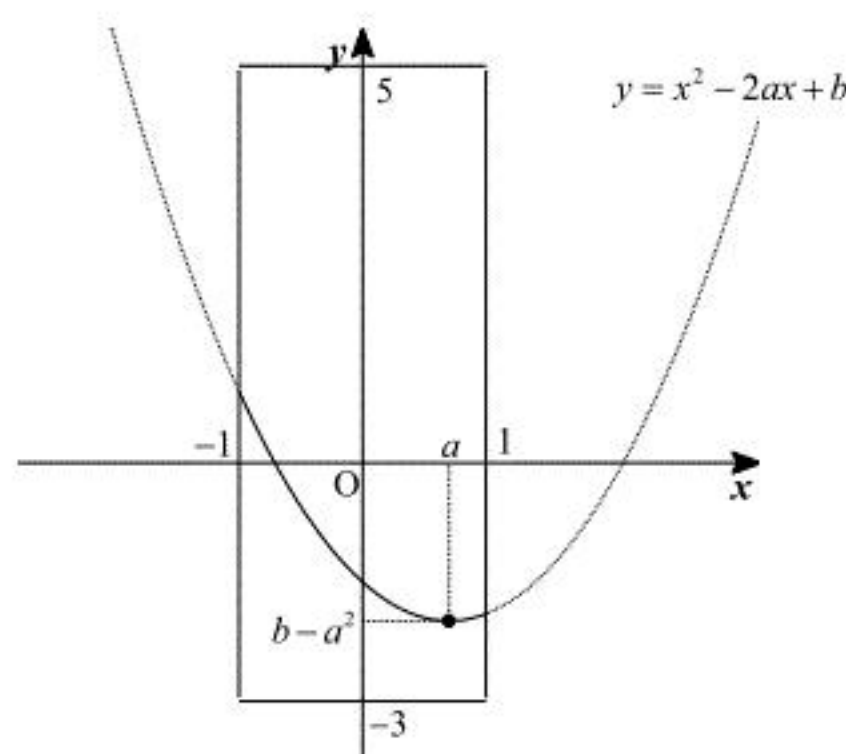
が条件であることがわかる。よって、

$$「f(1) \geq -3」 \text{ かつ } 「f(-1) \leq 5」$$

$$\Leftrightarrow 「1-2a+b \geq -3」 \text{ かつ } 「1+2a+b \leq 5」$$

$$\Leftrightarrow 「b \geq 2a-4」 \text{ かつ } 「b \leq -2a+4」$$

となる。

[2] $0 < a < 1$ のとき

上図より、

$$「f(a) > -3」 \text{ かつ } 「f(-1) \leq 5」$$

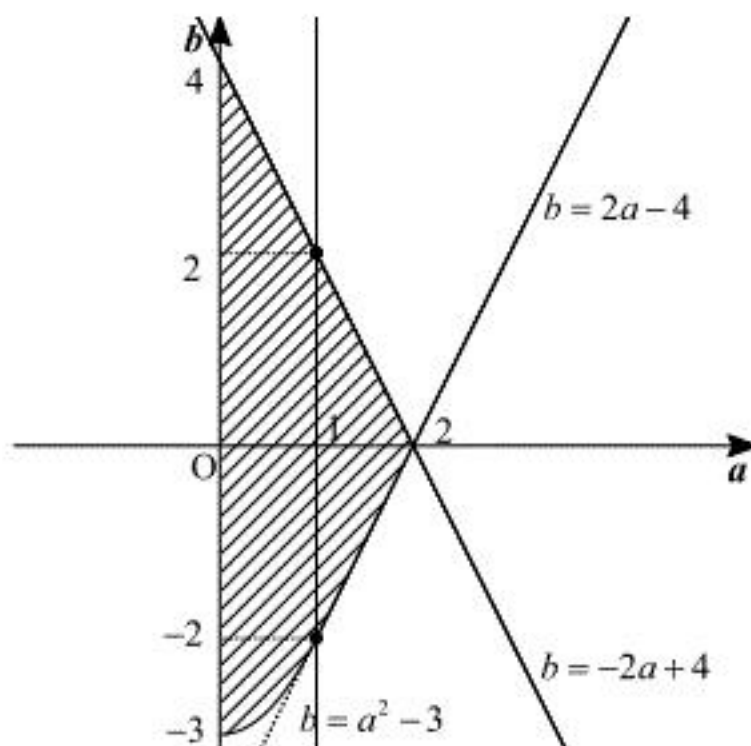
が条件であることがわかる。よって、

$$「f(a) > -3」 \text{ かつ } 「f(-1) \leq 5」$$

$$\Leftrightarrow 「b-a^2 > -3」 \text{ かつ } 「1+2a+b \leq 5」$$

$$\Leftrightarrow 「b > a^2-3」 \text{ かつ } 「b \leq -2a+4」$$

となる。

以上, [1], [2] より、条件を満たす (a, b) が動きうる領域は以下になる。ただし、境界線は $a=0$ ($-3 \leq b \leq 4$) と $b=a^2-3$ ($0 < a < 1$) を含まず、その他の部分を含む。

(答) 前図

(2)

与えられた条件より、 $-1 < x < 1$ の範囲では、

$$x^2 - 2ax + b > -3$$

が成立している。したがって、求める面積 S は

$$S = \int_0^1 \{(x^2 - 2ax + b) - (-3)\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (b+3)x \right]_0^1$$

$$= -a + b + \frac{10}{3}$$

となる。

(答) $S = -a + b + \frac{10}{3}$

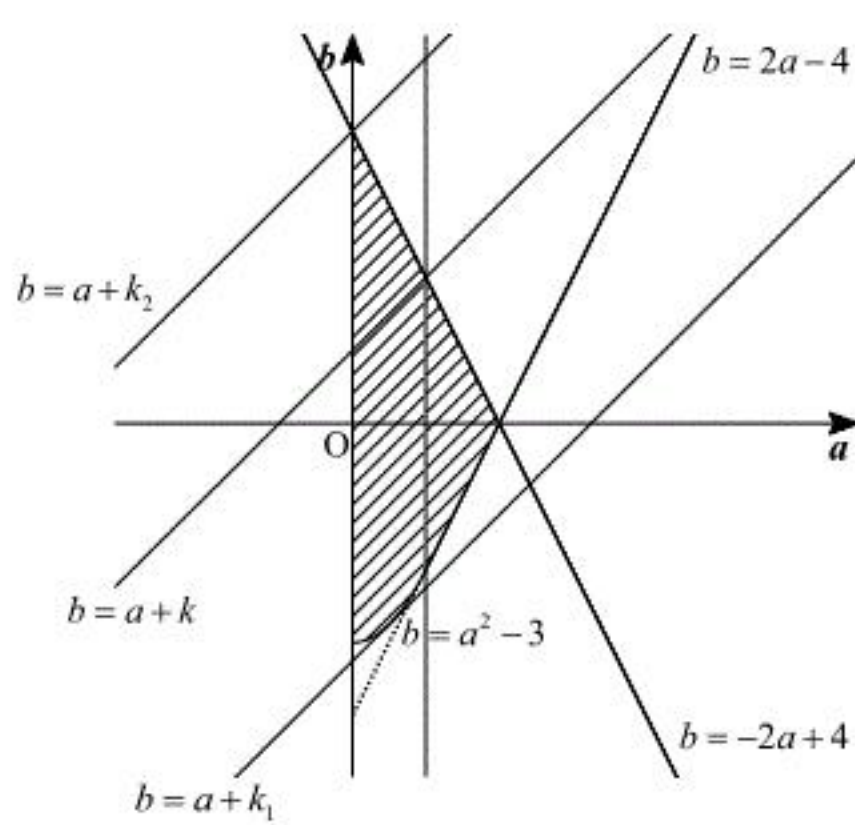
(3)

(2)の結果より、

$$S = -a + b + \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow b = a + S - \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow b = a + k$$

となる。ただし、 $k = S - \frac{10}{3}$ とおいた。直線 $b = a + k$ が(1)で求めた領域と共有点をもつときの k の取りうる値の範囲を求める。この 2 つの図形が共有点をもつときの位置関係は以下の通りとなる。図のように k_1, k_2 をおき、(1)で求めた境界線の条件に注意すると、 k のとりうる範囲は

$$k_1 < k = S - \frac{10}{3} < k_2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、直線 $b = a + k_1$ は放物線 $b = a^2 - 3$ の接線である。 $b = a^2 - 3$ を a で微分すると

$$b' = 2a$$

となるため、 $b' = 1$ とすると

$$b' = 1$$

$$\Leftrightarrow 2a = 1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

となる。これは、 $0 < a < 1$ を満たしている。よって、直線 $b = a + k_1$ と放物線 $b = a^2 - 3$ の接点の座標は $\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$ となる。 $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$ を式 $b = a + k_1$ に代入すると、

$$-\frac{11}{4} = \frac{1}{2} + k_1$$

$$\therefore k_1 = -\frac{13}{4}$$

となる。また、直線 $b = a + k_2$ は図より点 $(0, 4)$ を通るから、 $k_2 = 4$ である。したがって①より、

$$-\frac{13}{4} < S - \frac{10}{3} < 4$$

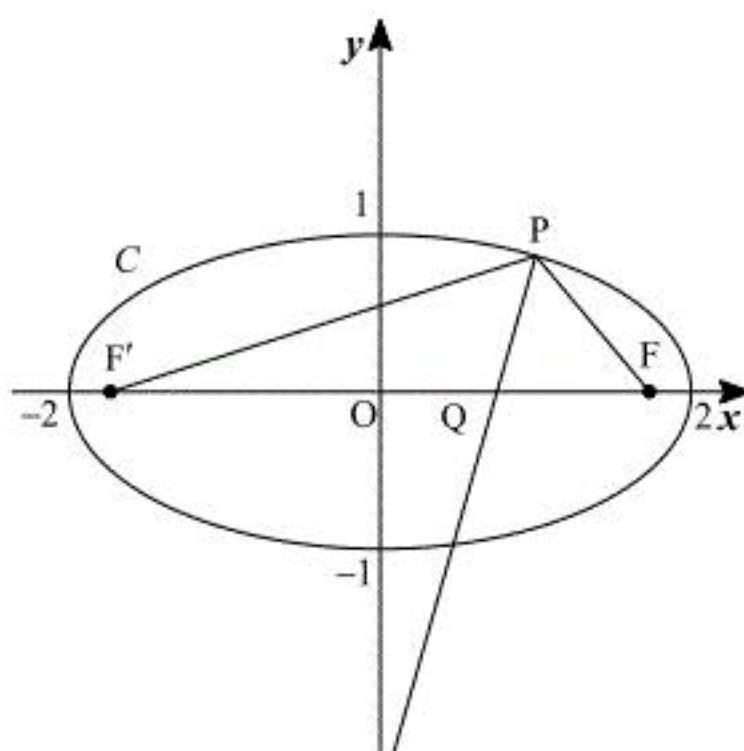
$$\Leftrightarrow \frac{1}{12} < S < \frac{22}{3}$$

となる。

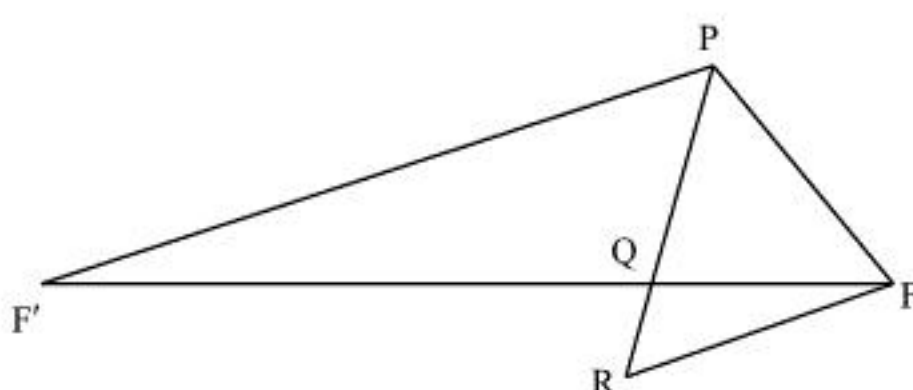
(答) $\frac{1}{12} < S < \frac{22}{3}$

(1)

題意より、楕円 C を図示すると以下のようになっている。



ここで、下図のように点 F を通り、線分 PF' に平行な直線と、直線 PQ との交点を R とする。



PF' と FR は平行であるから、錯角の関係により、

$$\angle PF'Q = \angle RFQ$$

が成立する。同様に、錯角の関係から、

$$\angle F'PQ = \angle FRQ \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立する。以上より、 $\triangle QPF'$ と $\triangle QRF$ が相似となる。したがって、

$$F'P : FR = F'Q : FQ \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ここで、線分 PQ は $\angle P$ の二等分線であるから、

$$\angle F'PQ = \angle FPR$$

となる。これと $\textcircled{1}$ より、 $\angle FPR = \angle FRP$ となり、 $\triangle FPR$ は二等辺三角形となるから、

$$FR = FP$$

が得られる。これを $\textcircled{2}$ に適用すると、

$$F'P : FP = F'Q : FQ$$

となる。

(証明終)

(2)

点 F, F' は焦点であるから、

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2^2 - 1^2} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。楕円の焦点の性質より、

$$\begin{aligned} FP + F'P &= 4 \\ \Leftrightarrow F'P &= 4 - FP \end{aligned}$$

となる。また、 $F'F$ の長さは $2\sqrt{3}$ であるから、

$$\begin{aligned} F'Q + FQ &= 2\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow F'Q &= 2\sqrt{3} - FQ \end{aligned}$$

となる。これらを(1)の結果に代入すると、

$$\begin{aligned} F'P : FP &= F'Q : FQ \\ \Leftrightarrow (4 - FP) : FP &= (2\sqrt{3} - FQ) : FQ \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{3}FP - FP \cdot FQ &= 4FQ - FP \cdot FQ \\ \Leftrightarrow \frac{FQ}{FP} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

が得られる。

$$\text{(答)} \quad \frac{FQ}{FP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3)

FP の長さは、

$$FP = \sqrt{(b - \sqrt{3})^2 + (c - 0)^2}$$

となる。また、点 P は楕円 C 上の点であるから、

$$\frac{b^2}{4} + c^2 = 1$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} FP &= \sqrt{(b - \sqrt{3})^2 + 1 - \frac{b^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}b^2 - 2\sqrt{3}b + 4} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3}b - 4)^2} \\ &= \frac{1}{2}|\sqrt{3}b - 4| \\ &= 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}b \quad (\because -2 < b < 2) \end{aligned}$$

となる。よって、(2)より、

$$\begin{aligned} FQ &= \frac{\sqrt{3}}{2}FP \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}b\right) \\ &= \sqrt{3} - \frac{3}{4}b \end{aligned}$$

となる。したがって、点 Q の x 座標は、

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3} - \left(\sqrt{3} - \frac{3}{4}b\right) \\ &= \frac{3}{4}b \end{aligned}$$

となる。よって、直線 PQ の傾きは、

$$\frac{c - 0}{b - \frac{3}{4}b} = \frac{4c}{b}$$

となることが示された。

(証明終)

(1)

$y = e^{-x}$ を x で微分すると、

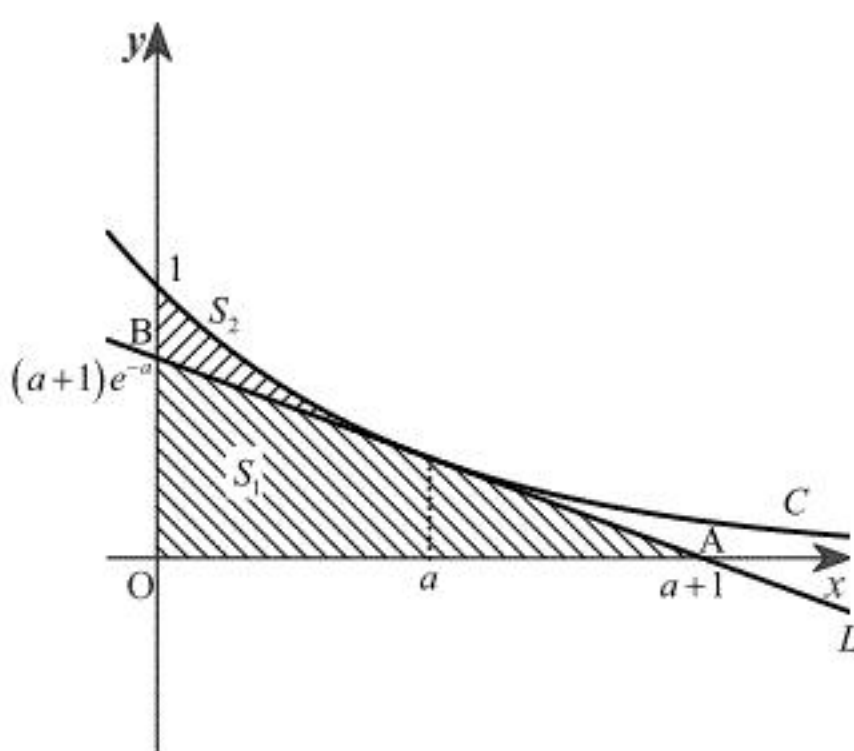
$$y' = -e^{-x}$$

となる。よって、接線の方程式は、

$$y - e^{-a} = -e^{-a}(x - a)$$

$$\Leftrightarrow y = -e^{-a}x + (a+1)e^{-a}$$

となる。したがって、 C, L の位置関係は下図のようになる。



$A(a+1, 0), B(0, (a+1)e^{-a})$ であるため、 S_1 を計算すると、

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}(a+1) \cdot (a+1)e^{-a} \\ &= \frac{(a+1)^2}{2} e^{-a} \end{aligned}$$

となる。また、 S_2 を計算すると、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^a [e^{-x} - \{-e^{-a}x + (a+1)e^{-a}\}] dx \\ &= \left[-e^{-x} + \frac{e^{-a}}{2}x^2 - (a+1)e^{-a}x \right]_0^a \\ &= \left(-\frac{1}{2}a^2 - a - 1 \right) e^{-a} + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_1 = \frac{(a+1)^2}{2} e^{-a}, S_2 = \left(-\frac{1}{2}a^2 - a - 1 \right) e^{-a} + 1$$

(2)

$f(a) = (a-1)e^a + 1$ において、 $a > 0$ のとき $f(a) > 0$ を示す。 $f(a)$ を a で微分すると、

$$\begin{aligned} f'(a) &= 1 \cdot e^a + (a-1)e^a \\ &= ae^a \end{aligned}$$

となる。 $a > 0$ であるから、

$$f'(a) > 0$$

が成立する。したがって、 $f(a)$ は単調増加であるから、

$$\begin{aligned} f(a) &> f(0) \\ \Leftrightarrow f(a) &> 0 \end{aligned}$$

が示された。

(証明終)

(3)

(1)の結果より、

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S_1} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}a^2 - a - 1 \right) e^{-a} + 1}{\frac{(a+1)^2}{2} e^{-a}} \\ &= \frac{-(a^2 + 2a + 2)}{(a+1)^2} + \frac{2}{(a+1)^2} e^a \\ &= -1 + \frac{2e^a - 1}{(a+1)^2} \end{aligned}$$

が得られる。これを a で微分すると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{S_2}{S_1} \right)' &= \frac{2e^a(a+1)^2 - (2e^a - 1) \cdot 2(a+1)}{(a+1)^4} \\ &= \frac{2e^a(a+1) - 2(2e^a - 1)}{(a+1)^3} \\ &= \frac{2\{(a-1)e^a + 1\}}{(a+1)^3} \end{aligned}$$

となる。(2)の結果より、 $(a-1)e^a + 1$ は $a > 0$ のとき常に正であるから、 $a > 0$ のとき

$$\left(\frac{S_2}{S_1} \right)' > 0$$

が成立する。したがって、区間 $(0, \infty)$ において、 $\frac{S_2}{S_1}$ は単調増加する。

(証明終)