

(1)

$t = \cos x$ とおくと、 x が動く範囲が $0 \leq x \leq \pi$ のとき、 t の動く範囲は $-1 \leq t \leq 1$ となる。ここで、与えられた関数を t で表すと、

$$\begin{aligned} y &= 2 \cos x - \cos 2x \\ &= 2 \cos x - (2 \cos^2 x - 1) \\ &= -2t^2 + 2t + 1 \\ &= -2 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \cos x &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 \leq x \leq \pi) \end{aligned}$$

で最大値 $\frac{3}{2}$ をとることがわかる。

(答) $\frac{3}{2}$

(2)

$u = \log_{0.5} x$ とおくと、 x が動く範囲が $0.5 \leq x \leq 2$ のとき、 u の動く範囲は

$$\begin{aligned} \log_{0.5} 2 &\leq u \leq \log_{0.5} 0.5 \\ \Leftrightarrow -1 &\leq u \leq 1 \end{aligned}$$

となる。ここで、与えられた関数を u で表すと、

$$\begin{aligned} y &= (\log_{0.5} x)^2 - \frac{1}{2} (\log_{0.5} x) + \frac{1}{2} \\ &= u^2 - \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} \\ &= \left(u - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{7}{16} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} u &= -1 \\ \Leftrightarrow \log_{0.5} x &= -1 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

で最大値 2 をとり、

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \log_{0.5} x &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{aligned}$$

で最小値 $\frac{7}{16}$ をとることがわかる。

(答) 最大値: 2, 最小値: $\frac{7}{16}$

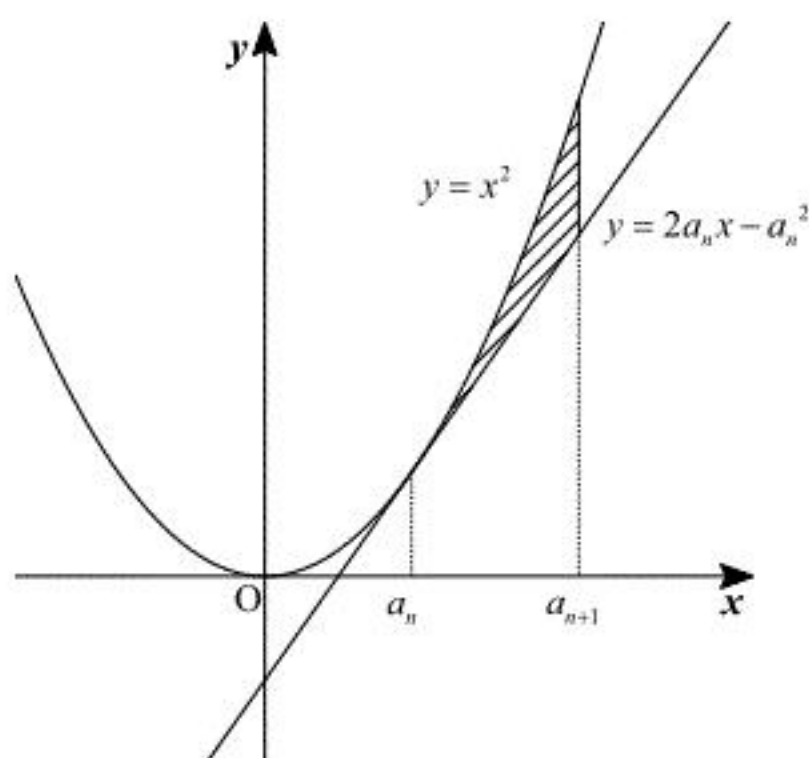
まず、与えられた条件から数列 $\{a_n\}$ に関する漸化式を導く。放物線の式 $y=x^2$ を x について

微分すると、 $y'=2x$ となるから、放物線上の点 (a_n, a_n^2) における接線の式は

$$y=2a_n(x-a_n)+a_n^2$$

$$\therefore y=2a_nx-a_n^2$$

となる。よって、放物線 $y=x^2$ とこの接線と直線 $x=a_{n+1}$ とで囲まれる図形の面積は、(ii)より、下図の斜線部の面積となる。



この面積を計算すると、

$$\begin{aligned}\int_{a_n}^{a_{n+1}} \{x^2 - (2a_nx - a_n^2)\} dx &= \int_{a_n}^{a_{n+1}} (x - a_n)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - a_n)^3 \right]_{a_n}^{a_{n+1}} \\ &= \frac{1}{3}(a_{n+1} - a_n)^3\end{aligned}$$

となる。(iii)より、この面積が 8^n と一致するとき、

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(a_{n+1} - a_n)^3 &= 8^n \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n &= \sqrt[3]{3} \cdot 2^n\end{aligned}$$

となるから、(i)と合わせて、数列 $\{a_n\}$ に関する漸化式

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + \sqrt[3]{3} \cdot 2^n \end{cases}$$

が得られる。この漸化式を解くと、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt[3]{3} \cdot 2^k \\ &= \sqrt[3]{3} \cdot 2 \cdot \frac{1-2^{n-1}}{1-2} \\ &= \sqrt[3]{3} (2^n - 2)\end{aligned}$$

となり、この式は $n=1$ を代入したときも成立するから、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

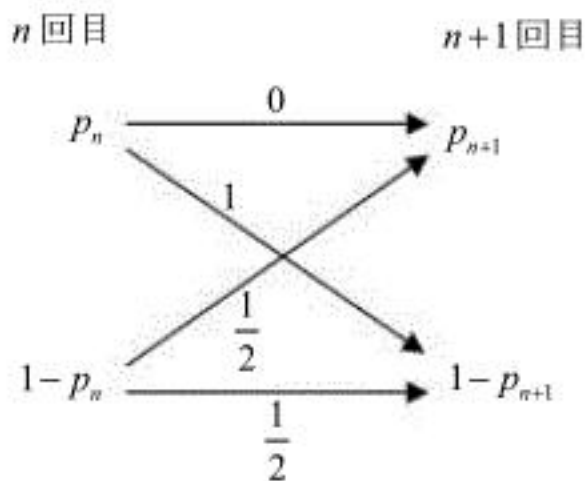
$$a_n = \sqrt[3]{3} (2^n - 2)$$

であることがわかる。

(答) $a_n = \sqrt[3]{3} (2^n - 2)$

(1)

以下、 n を自然数とする。最初に中央にあった玉が n 回の操作後に中央にある確率を p_n とおき、確率漸化式を立てることを考える。中央にある玉は次の操作後に必ず端にあり、一方で中央にない玉は次の操作後に $\frac{1}{2}$ の確率で中央にあることに注意すると、状態遷移図は以下の図のようになる。



したがって、関係式 $p_{n+1} = \frac{1}{2}(1-p_n)$ が成立する。これは $p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$ と変形でき、

$p_1 = 0$ より、数列 $\left\{p_n - \frac{1}{3}\right\}$ は初項 $-\frac{1}{3}$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列だから、

$$p_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

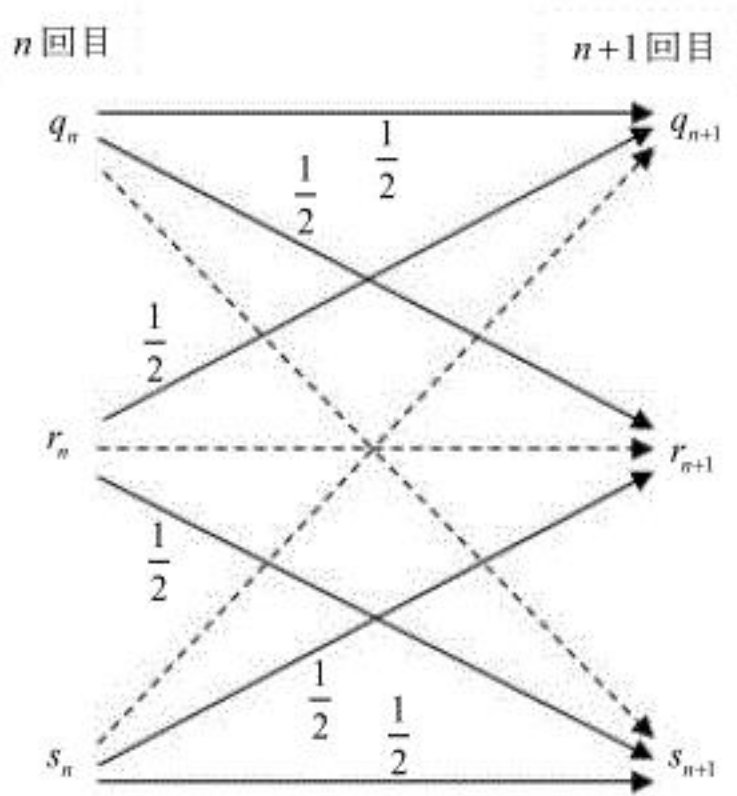
$$\therefore p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2)

最初に右端にあった玉が n 回の操作後に右端、中央、左端にある確率をそれぞれ q_n, r_n, s_n とおき、確率漸化式を立てることを考える。右端にある玉は次の操作後に $\frac{1}{2}$ の確率で右端、中央にあり、中央にある玉は次の操作後に $\frac{1}{2}$ の確率で右端、左端にあり、左端にある玉は次の操作後に $\frac{1}{2}$ の確率で中央、左端にあることに注意すると、状態遷移図は以下の図のようになる。



したがって、関係式

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}r_n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}s_n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$s_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{2}s_n \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

が成立する。また、1回の操作後を考えると、

$$q_1 = \frac{1}{2}, r_1 = \frac{1}{2}, s_1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

である。①、②、③の和より、

$$q_{n+1} + r_{n+1} + s_{n+1} = q_n + r_n + s_n$$

であるから、④より、

$$q_n + r_n + s_n = q_1 + r_1 + s_1 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

となる。②、⑤より、(1)と同様にして、

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}(q_n + s_n)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - r_n)$$

$$\therefore r_n = \left(r_1 - \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

となり、 $r_1 = \frac{1}{2}$ であるから、

$$r_n = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}$$

である。したがって、①と $q_1 = \frac{1}{2}$ より、漸化式

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{2} \\ q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{6} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} \end{cases}$$

を解けばよいことになり、この漸化式を変形すると、

$$\frac{q_{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{q_n}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} + \frac{1}{6} \{ 2^n - (-1)^n \}$$

となるから、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{q_n}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} &= \frac{q_1}{\left(\frac{1}{2}\right)^0} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{6} \{ 2^k - (-1)^k \} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} 2^k - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \right\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left\{ 2 \cdot \frac{1-2^{n-1}}{1-2} - (-1) \cdot \frac{1-(-1)^{n-1}}{1-(-1)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left\{ 2^n + \frac{1}{2} \cdot (-1)^n - \frac{3}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \left\{ 2^n + \frac{1}{2} \cdot (-1)^n \right\} \end{aligned}$$

であるから、

$$q_n = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{6} \left\{ 2^n + \frac{1}{2} \cdot (-1)^n \right\} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}$$

$$\therefore q_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

となり、これは $n=1$ のときも成立するから、

$$q_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

が求める確率である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

(1)

$\vec{a}=(2, 1, 1), \vec{b}=(2, s, t), \vec{c}=(p, q, 2)$ のとき, (i)より,

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= |\vec{b}| \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 &= |\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 2^2 + 1^2 + 1^2 &= 2^2 + s^2 + t^2 \\ \Leftrightarrow s^2 + t^2 &= 2 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ であることを用いて, (ii)より,

$$\begin{aligned} &\text{「}\vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ のなす角は } 60^\circ \text{」} \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ \\ \Leftrightarrow 2 \cdot 2 + 1 \cdot s + 1 \cdot t &= \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow s + t &= -1 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。ここで, ①, ②より,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} s^2 + t^2 = 2 \\ s + t = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (s+t)^2 - 2st = 2 \\ s + t = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (-1)^2 - 2st = 2 \\ s + t = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} st = -\frac{1}{2} \\ s + t = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

となり, s, t は 2 次方程式

$$x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$$

の解である。よって,

$$(s, t) = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \right) \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。(iii)より,

$$\begin{aligned} &\text{「}\vec{c} \text{ は } \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ の両方に直交する」} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2 \cdot p + 1 \cdot q + 1 \cdot 2 = 0 \\ 2 \cdot p + s \cdot q + t \cdot 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2p + q + 2 = 0 \\ 2p + sq + 2t = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (s-1)q + 2(t-1) = 0 \\ 2p + q + 2 = 0 \end{cases} \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。③より $(s, t) = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right)$ のとき, ④に代入して,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2} - 1 \right) q + 2 \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} - 1 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{-3-\sqrt{3}}{2} q = 3 - \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow &q = -\frac{2(3-\sqrt{3})^2}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} \\ \Leftrightarrow &q = -\frac{2(12-6\sqrt{3})}{9-3} \\ \therefore &q = -4 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

となり,

$$(p, q) = (1 - \sqrt{3}, -4 + 2\sqrt{3})$$

となる。また, ③より $(s, t) = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \right)$ のとき, ④に代入して,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} - 1 \right) q + 2 \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2} - 1 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{-3+\sqrt{3}}{2} q = 3 + \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow &q = -\frac{2(3+\sqrt{3})^2}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} \\ \Leftrightarrow &q = -\frac{2(12+6\sqrt{3})}{9-3} \\ \therefore &q = -4 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

となり,

$$(p, q) = (1 + \sqrt{3}, -4 - 2\sqrt{3})$$

と求まる。

$$\text{(答)} (s, t, p, q) = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 1-\sqrt{3}, -4+2\sqrt{3} \right), \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 1+\sqrt{3}, -4-2\sqrt{3} \right)$$

(2)

2 の累乗を順に計算していったとき, 桁が上がるたびに, 最上位の桁の数字が 1 であるものが必ずただ 1 つ存在する。(もし桁が上がったときの数の最上位の桁の数が 2 以上の数であるとしたら, その前の数で桁が上がっている。また, 最上位の桁の数が 1 の数の次の数は必ず最上位の桁の数が 2 以上である。)したがって, $n+1$ 個の自然数 $2^0, 2^1, \dots, 2^n$ の中に, 最上位の桁の数字が 1 であるものの個数は 2^n の桁数に等しくなる。 2^n が m 桁であるとき, 不等式

$$\begin{aligned} 10^{m-1} &\leq 2^n < 10^m \\ \Leftrightarrow m-1 &\leq n \log_{10} 2 < m \end{aligned}$$

を満たすから, このとき

$$\begin{aligned} [n \log_{10} 2] &= m-1 \\ \therefore m &= [n \log_{10} 2] + 1 \end{aligned}$$

となる。したがって, 求める個数は $[n \log_{10} 2] + 1$ 個である。

$$\text{(答)} [n \log_{10} 2] + 1$$

a は正の数であるとする。三角関数の加法定理より、与えられた関数 $f(x)$ を変形すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{a}} f(t) \cos(at - 2ax) dt + 1 \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{a}} f(t) (\cos at \cos 2ax + \sin at \sin 2ax) dt + 1 \\ &= \cos 2ax \int_0^{\frac{\pi}{a}} f(t) \cos at dt + \sin 2ax \int_0^{\frac{\pi}{a}} f(t) \sin at dt + 1 \end{aligned}$$

となるが、ここで、 $\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(t) \cos at dt$, $\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(t) \sin at dt$ は定数であるから、それぞれ p, q とおくことにする。このとき、

$$f(x) = p \cos 2ax + q \sin 2ax + 1$$

となるから、 p, q の定義より、

$$\begin{aligned} p &= \int_0^{\frac{\pi}{a}} (p \cos 2at + q \sin 2at + 1) \cos at dt \\ &= p \int_0^{\frac{\pi}{a}} \cos 2at \cos at dt + q \int_0^{\frac{\pi}{a}} \sin 2at \cos at dt + \int_0^{\frac{\pi}{a}} \cos at dt \\ &= p \int_0^{\frac{\pi}{a}} \left\{ \frac{1}{2} (\cos 3at + \cos at) \right\} dt + q \int_0^{\frac{\pi}{a}} \left\{ \frac{1}{2} (\sin 3at + \sin at) \right\} dt + \int_0^{\frac{\pi}{a}} \cos at dt \\ &= \frac{p}{2} \left[\frac{1}{3a} \sin 3at + \frac{1}{a} \sin at \right]_0^{\frac{\pi}{a}} + \frac{q}{2} \left[-\frac{1}{3a} \cos 3a - \frac{1}{a} \cos a \right]_0^{\frac{\pi}{a}} + \left[\frac{1}{a} \sin at \right]_0^{\frac{\pi}{a}} \\ &= \frac{p}{2} (0 - 0) + \frac{q}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3a} + \frac{1}{a} \right) - \left(-\frac{1}{3a} - \frac{1}{a} \right) \right\} + (0 - 0) \end{aligned}$$

$$\therefore p = \frac{4}{3a} q \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} q &= \int_0^{\frac{\pi}{a}} (p \cos 2at + q \sin 2at + 1) \sin at dt \\ &= p \int_0^{\frac{\pi}{a}} \cos 2at \sin at dt + q \int_0^{\frac{\pi}{a}} \sin 2at \sin at dt + \int_0^{\frac{\pi}{a}} \sin at dt \\ &= p \int_0^{\frac{\pi}{a}} \left\{ \frac{1}{2} (\sin 3at - \sin at) \right\} dt + q \int_0^{\frac{\pi}{a}} \left\{ -\frac{1}{2} (\cos 3at - \cos at) \right\} dt + \int_0^{\frac{\pi}{a}} \sin at dt \\ &= \frac{p}{2} \left[-\frac{1}{3a} \cos 3at + \frac{1}{a} \cos at \right]_0^{\frac{\pi}{a}} + \frac{q}{2} \left[-\frac{1}{3a} \sin 3a + \frac{1}{a} \sin a \right]_0^{\frac{\pi}{a}} + \left[-\frac{1}{a} \cos at \right]_0^{\frac{\pi}{a}} \\ &= \frac{p}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3a} - \frac{1}{a} \right) - \left(-\frac{1}{3a} + \frac{1}{a} \right) \right\} + \frac{q}{2} (0 - 0) + \left\{ \frac{1}{a} - \left(-\frac{1}{a} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\therefore q = -\frac{2}{3a} p + \frac{2}{a} \quad \dots \textcircled{2}$$

と計算される。①、②の連立方程式を解くと、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} p = \frac{4q}{3a} \\ q = -\frac{2}{3a} p + \frac{2}{a} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{4q}{3a} \\ q = -\frac{2}{3a} \cdot \frac{4q}{3a} + \frac{2}{a} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{4q}{3a} \\ \frac{9a^2 + 8}{9a^2} q = \frac{2}{a} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{24}{9a^2 + 8} \\ q = \frac{18a}{9a^2 + 8} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。したがって、関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{24}{9a^2 + 8} \cos 2ax + \frac{18a}{9a^2 + 8} \sin 2ax + 1$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \frac{24}{9a^2 + 8} \cos 2ax + \frac{18a}{9a^2 + 8} \sin 2ax + 1$$

(1)

関数 $f(x)$ は $f''(x) < 0$ を満たす。以下 $t \geq 0$ の範囲で考える。まず、

$$g(t) = f(t) - \{f(0) + f'(0)t\}$$

とおき、 $g(t) \geq 0$ であることを示す。この関数を微分すると、

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(t) - \{f''(t)t + f'(0)\} \\ &= -f''(t)t \end{aligned}$$

となるから、題意の条件より常に $g'(t) \geq 0$ となり、 $g(t)$ は単調増加関数となる。また、

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) - \{f(0) + f'(0) \cdot 0\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であることから、 $g(t) \geq 0$ であることがわかる。

次に、

$$h(t) = \{f(0) + f'(0)t\} - f(t)$$

とおき、 $h(t) \geq 0$ であることを示す。この関数を 2 回微分すると、

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(0) - f'(t) \\ h''(t) &= -f''(t) \end{aligned}$$

となるから、題意の条件より常に $h''(t) \geq 0$ となり、 $h'(t)$ は単調増加関数となる。また、

$$\begin{aligned} h'(0) &= f'(0) - f'(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であることから、 $h'(t) \geq 0$ であることがわかる。したがって、 $h(t)$ は単調増加関数となり、

さらに、

$$\begin{aligned} h(0) &= \{f(0) + f'(0) \cdot 0\} - f(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であることから、 $h(t) \geq 0$ であることがわかる。

以上の考察より、不等式

$$f(0) + f'(0)t \leq f(t) \leq f(0) + f'(0)t$$

が示された。

(証明終)

(2)

(1)より、 $0 \leq u \leq t$ の範囲で

$$f(0) + f'(u)u \leq f(u)$$

が成立するから、両辺を $0 \leq u \leq t$ の範囲で定積分することによって、

$$\int_0^t \{f(0) + f'(u)u\} du \leq \int_0^t f(u) du \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立する。ここで、①の左辺を計算すると、

$$\begin{aligned} \int_0^t \{f(0) + f'(u)u\} du &= \int_0^t f(0) du + \int_0^t f'(u)u du \\ &= [f(0)u]_0^t + [f(u)u]_0^t - \int_0^t f(u) du \\ &= \{f(0)t - 0\} + \{f(t)t - 0\} - \int_0^t f(u) du \\ &= f(0)t + f(t)t - \int_0^t f(u) du \end{aligned}$$

となるから、①は

$$\begin{aligned} f(0)t + f(t)t - \int_0^t f(u) du &\leq \int_0^t f(u) du \\ \Leftrightarrow \frac{f(0)t + f(t)t}{2} &\leq \int_0^t f(u) du \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となることがわかる。また、(1)より、 $0 \leq u \leq t$ の範囲で

$$f(u) \leq f(0) + f'(0)u$$

が成立するから、両辺を $0 \leq u \leq t$ の範囲で定積分することによって、

$$\int_0^t f(u) du \leq \int_0^t \{f(0) + f'(0)u\} du \quad \dots \textcircled{3}$$

が成立する。ここで、③の右辺を計算すると、

$$\begin{aligned} \int_0^t \{f(0) + f'(0)u\} du &= \left[f(0)u + \frac{f'(0)}{2}u^2 \right]_0^t \\ &= f(0)t + \frac{f'(0)}{2}t^2 \end{aligned}$$

となるから、③は

$$\int_0^t f(u) du \leq f(0)t + \frac{f'(0)}{2}t^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

となることがわかる。したがって、②、④より、不等式

$$\frac{f(0)t + f(t)t}{2} \leq \int_0^t f(u) du \leq f(0)t + \frac{f'(0)}{2}t^2$$

が示された。

(証明終)

与えられた不等式を変形すると、

$$\frac{1}{1+x^2+(y-x)^2} \leq \frac{a}{1+x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow a \geq \frac{1+x^2+y^2}{1+x^2+(y-x)^2} \quad (\because 1+x^2+y^2 > 0) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。すべての実数 x, y について①が成立するための a の条件を求めるために、まず x, y が実数全体を動くときの

$$k = \frac{1+x^2+y^2}{1+x^2+(y-x)^2}$$

のとり得る値の範囲を求める。ここで、 k のとり得る値の集合を W とおくと、

$$k \in W$$

$$\Leftrightarrow \left[k = \frac{1+x^2+y^2}{1+x^2+(y-x)^2} \text{ を満たす実数 } x, y \text{ が存在する} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[(k-1)y^2 - 2kxy + (2k-1)x^2 + k-1 = 0 \quad \cdots \textcircled{2} \right]$$

を満たす実数 x, y が存在する」

となる。以下 k の値で場合分けして条件を処理する。

[1] $k=1$ のとき

②は

$$-2xy + x^2 = 0 \Leftrightarrow x(x-2y) = 0$$

となるから、この式を満たす実数 x, y は存在する。したがって、 $1 \in W$ である。

[2] $k \neq 1$ のとき

②を満たす実数 y が存在するための条件は、判別式を考えることによって、

$$\left[(-2kx)^2 - 4(k-1)\{(2k-1)x^2 + k-1\} \geq 0 \text{ を満たす実数 } x \text{ が存在する} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[(-k^2 + 3k - 1)x^2 \geq (k-1)^2 \text{ を満たす実数 } x \text{ が存在する} \right] \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。ここで、 $x^2 \geq 0$ であり、また、 $k \neq 1$ より、 $(k-1)^2 > 0$ であることに注意すると、

③は

$$\begin{cases} -k^2 + 3k - 1 > 0 \\ k \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} < k < 1, 1 < k < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

と同値であることがわかる。

以上[1], [2]より、 $W = \left\{ k \mid \frac{3-\sqrt{5}}{2} < k < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\}$ となることがわかる。したがって、求める a の

範囲は

$$a \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$