

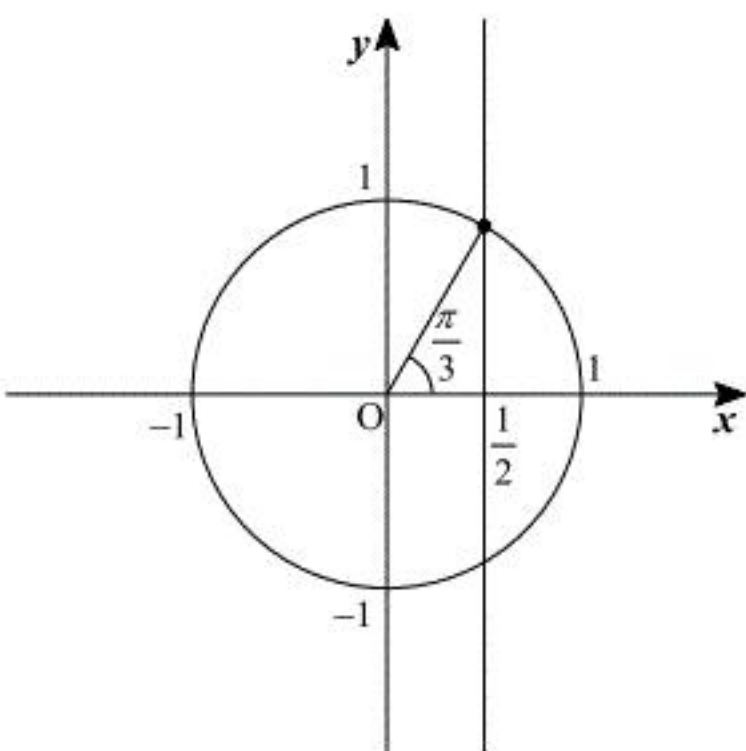
# 1

(1)

不等式  $\cos 3\theta + 4\cos^2 \theta < 0$  を  $0 < \theta < \pi$  の範囲で解く。3 倍角の公式  $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$  より、 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$  に注意して

$$\begin{aligned} \cos 3\theta + 4\cos^2 \theta &< 0 \\ \Leftrightarrow 4\cos^3 \theta + 4\cos^2 \theta - 3\cos \theta &< 0 \\ \Leftrightarrow 4\cos \theta \left( \cos \theta - \frac{1}{2} \right) \left( \cos \theta + \frac{3}{2} \right) &< 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta \left( \cos \theta - \frac{1}{2} \right) &< 0 \\ \Leftrightarrow 0 < \cos \theta < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。



したがって、 $0 < \theta < \pi$  の範囲における不等式の解は、 $(\cos \theta, \sin \theta)$  で表される上図の単位円を考えると、

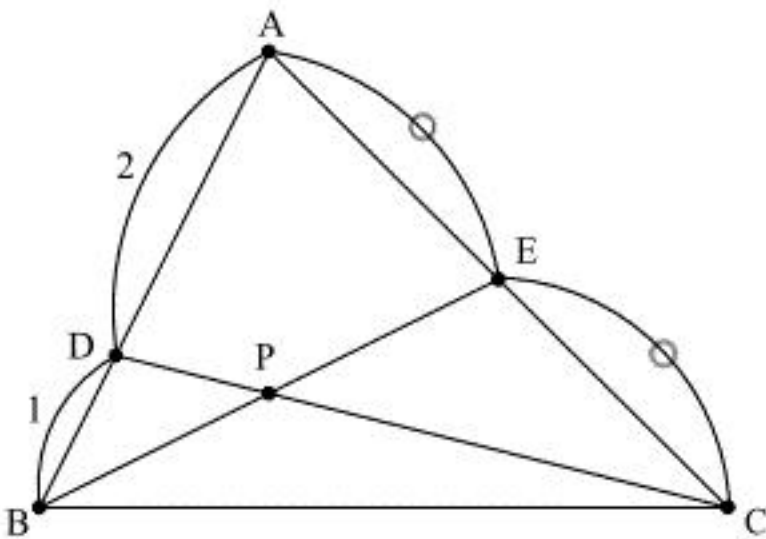
$$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

となる。

(答)  $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$

(2)

三角形 ABC と各点を図示すると、以下の図のようになる。



まず、ベクトル  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{AE}$  を  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  を用いて表すと、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AE} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

となる。ここで、点 P は直線 BE 上にあるから、ベクトル  $\overrightarrow{AP}$  は実数  $s$  を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= (1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AE} \\ &= (1-s)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}s\overrightarrow{AC} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1} \end{aligned}$$

と表せる。また、点 P は直線 CD 上にあるから、ベクトル  $\overrightarrow{AP}$  は実数  $t$  を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= (1-t)\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{2}{3}t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2} \end{aligned}$$

と表せる。①、②において、2 ベクトル  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  は大きさが 0 ではなく互いに平行でないから係数比較ができて、このとき連立方程式

$$\begin{cases} 1-s = \frac{2}{3}t \\ \frac{1}{2}s = 1-t \end{cases}$$

が導かれる。この連立方程式を解くと、

$$s = \frac{1}{2}, t = \frac{3}{4}$$

となるから、これを①に代入することで、ベクトル  $\overrightarrow{AP}$  は

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

と表せることがわかる。

(答)  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

(3)

無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+4+\cdots+2n}$  の第  $m$  部分和を計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{1}{2+4+\cdots+2n} &= \sum_{n=1}^m \frac{1}{\sum_{k=1}^n 2k} \\ &= \sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^m \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{m+1} \end{aligned}$$

となる。したがって、求める無限級数の値は

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+4+\cdots+2n} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{m+1} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

(1)

関数  $f(x) = \int_x^{x+1} |\log(2-t)| dt$  ( $0 < x < 1$ ) の導関数を求める。関数  $g(t)$  を  $g(t) = |\log(2-t)|$  と定め、

その原始関数を  $G(t)$  とおくと、

$$f(x) = G(x+1) - G(x)$$

となるから、 $\frac{d}{dx}G(x) = g(x)$  であることに注意すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \{G(x+1) - G(x)\} \\ &= g(x+1) - g(x) \\ &= |\log(1-x)| - |\log(2-x)| \end{aligned}$$

となる。ここで、 $f(x)$  の定義域は  $0 < x < 1$  であることから

$$0 < 1-x < 1$$

$$\therefore |\log(1-x)| = -\log(1-x)$$

となり、

$$2-x > 1$$

$$\therefore |\log(2-x)| = \log(2-x)$$

となる。したがって、 $f(x)$  の導関数は

$$\begin{aligned} f'(x) &= |\log(1-x)| - |\log(2-x)| \\ &= -\log(1-x) - \log(2-x) \\ &= -\log(2-x)(1-x) \end{aligned}$$

であることがわかる。

(答)  $-\log(2-x)(1-x)$

(2)

(1)で求めた導関数を、符号がわかりやすい形に変形すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\log(2-x)(1-x) \\ &= -\log(x^2 - 3x + 2) \\ &= -\log\left\{(x^2 - 3x + 1) + 1\right\} \\ &= -\log\left\{\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + 1\right\} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  であることに注意すると、 $0 < x < 1$  における  $f(x)$  の増減表は以下ようになる。

| $x$  | (0) | ... | $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ | ... | (1) |
|------|-----|-----|------------------------|-----|-----|
| $f'$ |     | -   | 0                      | +   |     |
| $f$  |     |     | 最小                     |     |     |

したがって、関数  $f(x)$  は  $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$  で最小となることがわかる。

(答)  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

### 3

以下  $O$  を原点とする座標空間上の 2 点  $P(\cos t, \sin t, 0)$ ,  $Q(\cos 2t, \sin 2t, \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) について考える。

(1)

2 つのベクトル  $\overrightarrow{OP}$ ,  $\overrightarrow{OQ}$  は平行でないことを背理法を用いて示す。すなわち,  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  が平行であると仮定して矛盾を導く。 $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  は  $0 \leq t \leq 2\pi$  で  $\vec{0}$  でないから,  $0$  でない実数  $k$  を用いて

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OQ}$$

と表せる。このとき, 各成分を比較すると,

$$\begin{cases} \cos t = k \cos 2t & \cdots \textcircled{1} \\ \sin t = k \sin 2t & \cdots \textcircled{2} \\ 0 = k \cos t & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

となる。 $\textcircled{3}$  に注目すると,  $k \neq 0$  より,

$$\begin{aligned} 0 &= k \cos t \\ \Leftrightarrow \cos t &= 0 \\ \therefore t &= \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

となる。 $t = \frac{\pi}{2}$  のとき,  $\textcircled{2}$  に代入すると,

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2} &= k \sin \pi \\ \Leftrightarrow 1 &= k \cdot 0 \end{aligned}$$

となり, この式を満たす  $k$  は存在しない。また,  $t = \frac{3}{2}\pi$  のとき,  $\textcircled{2}$  に代入すると,

$$\begin{aligned} \sin \frac{3}{2}\pi &= k \sin 3\pi \\ \Leftrightarrow -1 &= k \cdot 0 \end{aligned}$$

となり, この式を満たす  $k$  は存在しない。以上より,  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  が平行であることに矛盾するから, 背理法によって  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  は平行でないことが示された。

(証明終)

(2)

三角形  $OPQ$  の面積  $S(t)$  は

$$S(t) = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 |\overrightarrow{OQ}|^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ})^2}$$

である。ここで,  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  について

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}|^2 &= \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \\ |\overrightarrow{OQ}|^2 &= \cos^2 2t + \sin^2 2t + \cos^2 t = 1 + \cos^2 t \\ \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= \cos t \cos 2t + \sin t \sin 2t \\ &= \cos(t - 2t) \quad (\because \text{三角関数の加法定理}) \\ &= \cos(-t) \\ &= \cos t \end{aligned}$$

が成立するから, これらを代入することで

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \cos^2 t - \cos^2 t} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と求まる。したがって, 三角形  $OPQ$  の面積  $S(t)$  は  $t$  の値に関係なく一定である。

(証明終)

(3)

内積の定義より,

$$\begin{aligned} \cos \theta(t) &= \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|} \\ &= \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} \end{aligned}$$

である。ここで  $u = \cos t$  とおくと,  $0 \leq t \leq 2\pi$  より  $-1 \leq u \leq 1$  であり, このとき関数

$$f(u) = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}$$

のとり得る値の範囲を求めればよい。この関数を微分すると,

$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} - \frac{u^2}{(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

より, 定義域  $-1 < u < 1$  で常に正であるから, 関数  $f(u)$  は単調増加関数であり,

$$\begin{aligned} f(-1) &\leq f(u) \leq f(1) \\ \therefore -\frac{1}{\sqrt{2}} &\leq f(u) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となることがわかる。ここで  $\theta(t)$  は 2 つのベクトル  $\overrightarrow{OP}$ ,  $\overrightarrow{OQ}$  のなす角であったから,

$$0 \leq \theta(t) \leq \pi$$

の範囲で考えてよく, このとき  $\textcircled{4}$  より

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{2}} &\leq \cos \theta(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \therefore \frac{\pi}{4} &\leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

となることがわかる。

$$\text{(答)} \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta(t) \leq \frac{3}{4}\pi$$

(1)

関数  $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$  の導関数  $f'(x)$  を計算すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{\sqrt{x^2 + 1} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(2)

曲線  $C$  と直線  $y=1$  の交点  $P$  の座標を求める。曲線  $C$  と直線  $y=1$  の式から  $y$  を消去すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \\ \Leftrightarrow \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) &= 1 \\ \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} &= e \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} &= e - x \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。①の左辺は  $\sqrt{x^2 + 1} > 0$  であるから、右辺は

$$e - x > 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる必要があり、この条件の下で

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \Leftrightarrow x^2 + 1 &= e^2 - 2ex + x^2 \\ \Leftrightarrow 2ex &= e^2 - 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{e^2 - 1}{2e} \end{aligned}$$

となる。これは

$$\begin{aligned} e - x &= e - \frac{e^2 - 1}{2e} \\ &= \frac{2e^2 - e^2 + 1}{2e} \\ &= \frac{e^2 + 1}{2e} > 0 \end{aligned}$$

より②を満たすから、十分である。したがって点  $P$  の座標は

$$P\left(\frac{e^2 - 1}{2e}, 1\right)$$

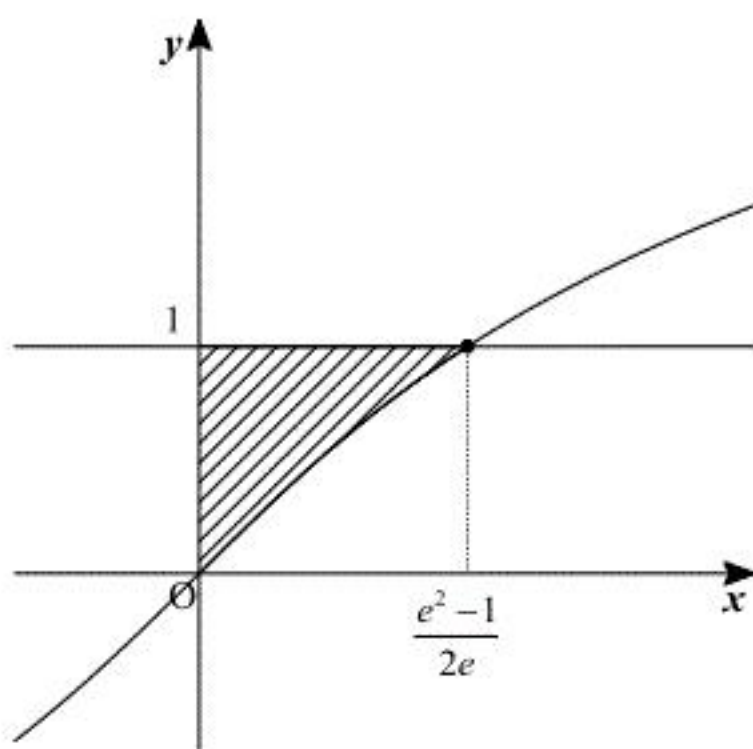
と求まる。

$$(\text{答}) \quad P\left(\frac{e^2 - 1}{2e}, 1\right)$$

(3)

(1)の結果より、常に  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$  であるから関数  $f(x)$  は単調増加関数である。また、

$f(0) = 0$  より曲線  $C$  は原点を通るから、曲線  $C$ 、直線  $y=1$  および  $y$  軸で囲まれた図形は、以下の図の斜線部のようになる。



したがって、求める図形の面積  $S$  を計算すると、 $x = \frac{e^2 - 1}{2e}$  のとき  $x + \sqrt{x^2 + 1} = e$  であることに

注意して

$$\begin{aligned} S &= 1 \cdot \frac{e^2 - 1}{2e} - \int_0^{\frac{e^2 - 1}{2e}} \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx \\ &= \frac{e^2 - 1}{2e} - \int_0^{\frac{e^2 - 1}{2e}} (x)' \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx \\ &= \frac{e^2 - 1}{2e} - \left[ x \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^{\frac{e^2 - 1}{2e}} + \int_0^{\frac{e^2 - 1}{2e}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \left( \because \left\{ \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right\}' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ &= \frac{e^2 - 1}{2e} - \left[ x \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^{\frac{e^2 - 1}{2e}} + \left[ \sqrt{x^2 + 1} \right]_0^{\frac{e^2 - 1}{2e}} \\ &= \frac{e^2 - 1}{2e} - \left( \frac{e^2 - 1}{2e} - 0 \right) + \left\{ \left( e - \frac{e^2 - 1}{2e} \right) - 1 \right\} \\ &= \frac{(e - 1)^2}{2e} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{(e - 1)^2}{2e}$$