

平成 26 年度入学試験問題

数 学

注 意 事 項

1. この問題冊子は試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 解答用紙は問題冊子とは別になっているので、解答はすべて解答用紙の指定されたところに記入すること。また、解答用紙は問題ごとに別になっているので、注意すること。
3. 受験番号を解答用紙の指定されたところへ必ず記入すること。決して氏名を書いてはいけない。
4. この問題冊子は持ち帰ること。

解答にあたっての注意事項

この問題冊子には、経済学部、理学部、医学部の問題がある。受験者は下の表にしたがって、志望学部学科の問題を解答すること。

学 部	学 科	解 答 す る 問 題
経済学部	経済学科 経済システム法学科	①, ②, ③, ④ の 4 問
理学部	数理・自然情報科学科	②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦ の 6 問
医学部	医 学 科	③, ④, ⑤, ⑥, ⑦ の 5 問
	保 健 学 科	①, ②, ③, ④ の 4 問

1

次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = 2 \cos x - \cos 2x$ の $0 \leq x \leq \pi$ における最大値を求めよ。
- (2) 関数 $y = (\log_{0.5} x)^2 - \frac{1}{2}(\log_{0.5} x) + \frac{1}{2}$ の $0.5 \leq x \leq 2$ における最大値と最小値を求めよ。

2

次の3つの条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(i) $a_1 = 0$

(ii) $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$

(iii) 放物線 $y = x^2$ と、その上の点 (a_n, a_n^2) における接線と、直線 $x = a_{n+1}$ とで囲まれる図形の面積が 8^n になる。

3

3 個の玉が横に一直列に並んでいる。コインを 1 回投げて、それが表であれば、そのときに中央にある玉とその左にある玉とを入れ替える。また、それが裏であれば、そのときに中央にある玉とその右にある玉とを入れ替える。この操作を繰り返す。

- (1) 最初に中央にあったものが n 回後に中央にある確率を求めよ。
- (2) 最初に右端にあったものが n 回後に右端にある確率を求めよ。

4

次の各問いに答えよ。

- (1) 3つのベクトル $\vec{a} = (2, 1, 1)$, $\vec{b} = (2, s, t)$, $\vec{c} = (p, q, 2)$ が次の条件をみたすような, s, t, p, q の値を求めよ。
- (i) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$
 - (ii) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 60°
 - (iii) $\vec{c}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交する。
- (2) n を 0 以上の整数とする。 $n+1$ 個の自然数 $2^0, 2^1, \dots, 2^n$ の中に、最上位の桁の数字が 1 であるものはいくつあるか。ただし、 x を超えない最大の整数を表す記号 $[x]$ を用いて解答してよい。
- 注：例えば 2014 の最上位の桁の数字は 2 であり、14225 の最上位の桁の数字は 1 である。

5

a を正の数とする。このとき、次の関係式をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{a}} f(t) \cos(at - 2ax) dt + 1$$

6

関数 $f(x)$ は、 $f''(x) < 0$ をみたすとする。 $t \geq 0$ のとき、次の (1), (2) の不等式が成り立つことを示せ。

$$(1) \quad f(0) + f'(t)t \leq f(t) \leq f(0) + f'(0)t$$

$$(2) \quad \frac{f(0)t + f(t)t}{2} \leq \int_0^t f(u) du \leq f(0)t + \frac{f'(0)}{2}t^2$$

7

すべての実数 x, y に対して不等式

$$\frac{1}{1+x^2+(y-x)^2} \leq \frac{a}{1+x^2+y^2}$$

が成り立つとき、 a の値の範囲を求めよ。