

(1)

与えられた条件より、 $m=0$ のとき $A(m, n)=n+1$ であるから、

$$A(0, 0)=1$$

$$A(0, 1)=2$$

$$A(0, 2)=3$$

$$A(0, 3)=4$$

となる。また、

$$A(1, 0)=A(0, 1)$$

$$=2$$

$$A(1, 1)=A(0, A(1, 0))$$

$$=A(0, 2)$$

$$=3$$

$$A(1, 2)=A(0, A(1, 1))$$

$$=A(0, 3)$$

$$=4$$

$$A(1, 3)=A(0, A(1, 2))$$

$$=A(0, 4)$$

$$=5$$

と求まる。

(答)

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$m=0$	1	2	3	4
$m=1$	2	3	4	5

(2)

最初に、

$$A(1, n)=n+2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す。 $n=0$ のとき、(1)より

$$A(1, 0)=2$$

となるため①を満たす。 k を0以上の整数として $n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると、

$$A(1, k+1)=A(0, A(1, k))$$

$$=A(0, k+2)$$

$$=k+3$$

$$=(k+1)+2$$

となるため $n=k+1$ のときも①が成立する。したがって0以上の整数 n について①が成り立つ。

次に、

$$A(2, n)=2n+3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す。 $n=0$ のとき、(1)より

$$A(2, 0)=A(1, 1)$$

$$=3$$

となるため②を満たす。 k を0以上の整数として $n=k$ のとき②が成り立つと仮定すると、

$$A(2, k+1)=A(1, A(2, k))$$

$$=A(1, 2k+3)$$

$$=2k+5 (\because \textcircled{1})$$

$$=2(k+1)+3$$

となるため $n=k+1$ のときも②が成立する。したがって0以上の整数 n について②が成り立つ。

以上より題意が示された。

(証明終)

(1)

A, B の x 座標を求めるために P, ℓ_1 の方程式を連立させ y を消去すると,

$$\begin{aligned}x^2 &= tx + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow x^2 - tx - \frac{1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 1}}{2}\end{aligned}$$

となる。 A の x 座標は B の x 座標よりも大きいので、 A, B の座標は

$$A\left(\frac{t + \sqrt{t^2 + 1}}{2}, \frac{t^2 + t\sqrt{t^2 + 1}}{2} + \frac{1}{4}\right), B\left(\frac{t - \sqrt{t^2 + 1}}{2}, \frac{t^2 - t\sqrt{t^2 + 1}}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

と表される。したがって線分 AB の長さを計算すると,

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{\left(\frac{t + \sqrt{t^2 + 1}}{2} - \frac{t - \sqrt{t^2 + 1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{t^2 + t\sqrt{t^2 + 1}}{2} + \frac{1}{4} - \frac{t^2 - t\sqrt{t^2 + 1}}{2} - \frac{1}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{t^2 + 1}\right)^2 + \left(t\sqrt{t^2 + 1}\right)^2} \\ &= \sqrt{t^2 + 1 + t^2(t^2 + 1)} \\ &= \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} \\ &= \sqrt{(t^2 + 1)^2} \\ &= |t^2 + 1| \\ &= t^2 + 1 \quad (\because t^2 + 1 > 0)\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $t^2 + 1$

(2)

(1)と同様に、線分 CD の長さを t を用いて表す。 P, ℓ_2 の方程式を連立させ y を消去すると,

$$\begin{aligned}x^2 &= -\frac{1}{t}x + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{t}x - \frac{1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-\frac{1}{t} \pm \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}}{2} \\ \therefore x &= \frac{-1 \pm \sqrt{t^2 + 1}}{2t}\end{aligned}$$

となる。 C の x 座標は D の x 座標よりも大きいので、 C, D の座標は

$$C\left(\frac{-1 + \sqrt{t^2 + 1}}{2t}, -\frac{-1 + \sqrt{t^2 + 1}}{2t^2} + \frac{1}{4}\right), D\left(\frac{-1 - \sqrt{t^2 + 1}}{2t}, -\frac{-1 - \sqrt{t^2 + 1}}{2t^2} + \frac{1}{4}\right)$$

と表される。したがって線分 CD の長さを計算すると,

$$\begin{aligned}CD &= \sqrt{\left(\frac{-1 + \sqrt{t^2 + 1}}{2t} - \frac{-1 - \sqrt{t^2 + 1}}{2t}\right)^2 + \left(-\frac{-1 + \sqrt{t^2 + 1}}{2t^2} + \frac{1}{4} - \left(-\frac{-1 - \sqrt{t^2 + 1}}{2t^2} + \frac{1}{4}\right)\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^2} + \frac{t^2 + 1}{t^4}} \\ &= \sqrt{\frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^4}} \\ &= \frac{t^2 + 1}{t^2} \quad (\because t^2 > 0)\end{aligned}$$

と求まる。直線 ℓ_1, ℓ_2 について、その傾きの積は

$$t \cdot \left(-\frac{1}{t}\right) = -1$$

となるため線分 AB と線分 CD は垂直に交わる。したがって、四角形 $ADBC$ の面積を S とすると,

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} AB \cdot CD \\ &= \frac{(t^2 + 1)^2}{2t^2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)\end{aligned}$$

となる。ここで $t^2 > 0$ であるから、相加相乗平均より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) &\geq \sqrt{t^2 \cdot \frac{1}{t^2}} = 1 \\ \Leftrightarrow S &\geq 2\end{aligned}$$

である。したがって S が最小となるとき,

$$\begin{aligned}t^2 &= \frac{1}{t^2} \\ \therefore t &= 1 \quad (\because t > 0)\end{aligned}$$

である。

(答) $t = 1$

(1)

 $f(x)$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x \left\{ \cos^2 2(x-t) - \frac{1}{4} \right\} dt \\
 &= \int_0^x \left\{ \frac{1 + \cos 4(x-t)}{2} - \frac{1}{4} \right\} dt \\
 &= \int_0^x \left\{ \frac{\cos 4(x-t)}{2} + \frac{1}{4} \right\} dt \\
 &= \left[-\frac{\sin 4(x-t)}{8} + \frac{1}{4}t \right]_0^x \\
 &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\sin 4x
 \end{aligned}$$

となるため,

$$f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 4x$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 4x$$

(2)

 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $0 \leq 4x \leq 2\pi$ であるから, $f'(x) = 0$ とすると

$$\cos 4x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \quad (\because 0 \leq 4x \leq 2\pi)$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$$

である。よって, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
f'	+	+	0	-	0	+	
f	$f(0)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\searrow$	$f\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

また,

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{8}\sin 0 \\
 &= 0 \\
 f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\pi}{24} + \frac{1}{8}\sin \frac{2}{3}\pi \\
 &= \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{16} \\
 f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{8}\sin \frac{4}{3}\pi \\
 &= \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16} \\
 f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8}\sin 2\pi \\
 &= \frac{\pi}{8}
 \end{aligned}$$

である。ここで,

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{48}(4\pi - 3\sqrt{3}) \\
 &> \frac{1}{48}(4 \cdot 3 - 3\sqrt{3}) \quad (\because \pi > 3) \\
 &= \frac{1}{16}(4 - \sqrt{3}) \\
 &> 0 \quad (\because 4 > \sqrt{3})
 \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{16} \\
 &= \frac{1}{48}(4\pi - 3\sqrt{3}) \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

である。すなわち,

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{3}\right) &> f(0) \\
 f\left(\frac{\pi}{2}\right) &> f\left(\frac{\pi}{6}\right)
 \end{aligned}$$

であるから, $f(x)$ の最大値は $\frac{\pi}{8}$ であり最小値は 0 である。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値: } \frac{\pi}{8}, \text{ 最小値: } 0$$

$x > 0$ において $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ とおき e を底として両辺の対数をとると,

$$\log f(x) = \frac{1}{x} \log x$$

となる。この式の両辺を x について微分すると,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = f(x) \cdot \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$\therefore f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \log x)$$

と求まる。 $x > 0$ のとき、 $x^{\frac{1}{x}-2} > 0$ であるから,

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \log x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \log x = 0$$

$$\therefore x = e$$

となる。したがって $x > 0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	$f(e)$	$\searrow$

増減表より,

$$f(2) < f(e) \quad (\because 2 < e)$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}} < e^{\frac{1}{e}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} < e^{\frac{1}{e}}$$

が成り立つため、題意が示された。