

M は線分 AC の中点なので

$$\left(\frac{0 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}, \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

となる。また、N は線分 BC の中点なので

$$\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}, \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{2} \right) = \left(0, -\frac{1}{2} \right)$$

となる。これより直線 MN の傾きは

$$\frac{\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{4} - 0} = \sqrt{3}$$

であるから、直線の方程式は

$$y = \sqrt{3}x - \frac{1}{2}$$

となる。ここで、円 O の方程式は

$$x^2 + y^2 = 1$$

となるので、円と直線の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\sqrt{3}x - \frac{1}{2} \right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - \sqrt{3}x - \frac{3}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow 16x^2 - 4\sqrt{3}x - 3 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{15}}{8} \end{aligned}$$

とわかる。Q は N に近い点なので座標は、 $\left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{15}}{8}, \frac{-1 - 3\sqrt{5}}{8} \right)$ となる。従って、NQ の長さは

$$\begin{aligned} NQ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{15}}{8} - 0 \right)^2 + \left\{ \frac{-1 - 3\sqrt{5}}{8} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right\}^2} \\ &= \frac{\sqrt{72 - 24\sqrt{5}}}{8} \\ &= \frac{2\sqrt{18 - 2\sqrt{45}}}{8} \\ &= \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad NQ = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{4}$$

(1)

背理法により証明する。 y が奇数であると仮定する。(i)より x は奇数であるから、 x^2 も奇数である。 y^2 も同様に奇数である。(ii)より

$$x^2 + y^2 = z^2$$

であるから、奇数同士の和であるのは偶数となる。従って、 z^2 は 2 を素因数に持ち、 z が偶数であることがわかる。以上より、自然数 k, l, m を用いて

$$\begin{cases} x = 2k - 1 \\ y = 2l - 1 \\ z = 2m \end{cases}$$

と表すことができる。これより

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2k - 1)^2 + (2l - 1)^2 \\ &= 4(k^2 - k + l^2 - l) + 2 \end{aligned}$$

$$z^2 = 4m^2$$

となるので、 $x^2 + y^2$ は 4 で割って 2 余り、 z^2 は 4 で割って 0 余る。従って

$$x^2 + y^2 \neq z^2$$

となるが、これは(ii)に反する。よって、 y は偶数である。

(証明終)

(2)

(ii)より

$$y^2 = z^2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{z-x}{2} \cdot \frac{z+x}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。(1)より x が奇数、 y が偶数であり、 z が奇数となることから、 $z-x, z+x$ はともに偶数であるから、 $\frac{y}{2}, \frac{z-x}{2}, \frac{z+x}{2}$ はいずれも整数である。ここで、 $\frac{z-x}{2}$ と $\frac{z+x}{2}$ が 2 以上の素数

p を公約数に持つと仮定すると、 $\frac{z-x}{2}$ と $\frac{z+x}{2}$ の和と差である z, x は p の倍数となる。しかし、

$p=2$ のときは(i)に矛盾し、 $p \geq 3$ のときは①より y が p で割り切れるため(iii)に矛盾する。し

たがって、 $\frac{z-x}{2}$ と $\frac{z+x}{2}$ は互いに素であり、①より右辺が平方数であることを踏まえると、

$\frac{z-x}{2}, \frac{z+x}{2}$ は互いに素である自然数 a, b を用いて

$$\begin{cases} \frac{z+x}{2} = a^2 \\ \frac{z-x}{2} = b^2 \end{cases}$$

とおくことができる。これより

$$\begin{cases} x = a^2 - b^2 \\ y = 2ab \\ z = a^2 + b^2 \end{cases}$$

が得られ、題意を満たす自然数 a, b が存在することが示された。

(証明終)

(3)

$(a, b) = (4, 3), (5, 4)$ とすると、(2)の結果より

$$(x, y, z) = (7, 24, 25), (9, 40, 41)$$

が得られる。これは、条件を満たすので正しい。

(答) $(x, y, z) = (7, 24, 25), (9, 40, 41)$

(1)

放物線 C が点 $(1, 1)$ で直線 ℓ と接し、かつ x 軸と共有点を持つことを満たす必要条件について考える。 $x=1$ での C の接線の傾きが 2 であり、かつ C 上に点 $(1, 1)$ が存在し、かつ C と $y=0$ が交点をもつことである。 C の導関数は

$$y' = 2ax + b$$

であるから、 $x=1$ での C の接線の傾きが 1 であるとき

$$2a + b = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、 C 上に点 $(1, 1)$ が存在するとき

$$a + b + c = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。 C と $y=0$ が交点をもつとき

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の判別式が、0 以上になるので

$$b^2 - 4ac \geq 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。 $\textcircled{1}$ から $\textcircled{2}$ を引くと、

$$a - c = 1$$

$$\Leftrightarrow c = a - 1 \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。よって、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{4}$ を $\textcircled{3}$ に代入して、

$$(2 - 2a)^2 - 4a(a - 1) \geq 0$$

$$4 - 4a \geq 0$$

$$\therefore 0 < a \leq 1 \quad (\because a > 0)$$

となる。よって、必要条件は

$$0 < a \leq 1, b = 2 - 2a, c = a - 1$$

である。この条件が十分条件を満たしているかについては放物線 C の式にこれらの条件を代入した時に点 $(1, 1)$ で直線 ℓ と接し、かつ x 軸と共有点を持つかを考える。放物線 C の式は

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= ax^2 + (-2a + 2)x + a - 1 \end{aligned}$$

となり点 $(1, 1)$ を通る。点 $(1, 1)$ での接線は $y' = 2ax - 2a + 2$ より

$$y - 1 = (2a - 2a + 2)(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = 2x - 1$$

となり直線 ℓ に等しい。判別式 D について考えると

$$\begin{aligned} D &= (-2a + 2)^2 - 4a(a - 1) \\ &= 4a^2 - 8a + 4 - 4a^2 + 4a \\ &= -4a + 4 > 0 \quad (\because 0 < a \leq 1) \end{aligned}$$

となるので十分条件も満たす。したがって必要十分条件は

$$0 < a \leq 1, b = 2 - 2a, c = a - 1$$

である。

(答) $0 < a \leq 1, b = 2 - 2a, c = a - 1$

(2)

a が (1) の条件を満たすので、 b, c の値を求めると

$$b = 2 - 2a$$

$$= \frac{2}{9}$$

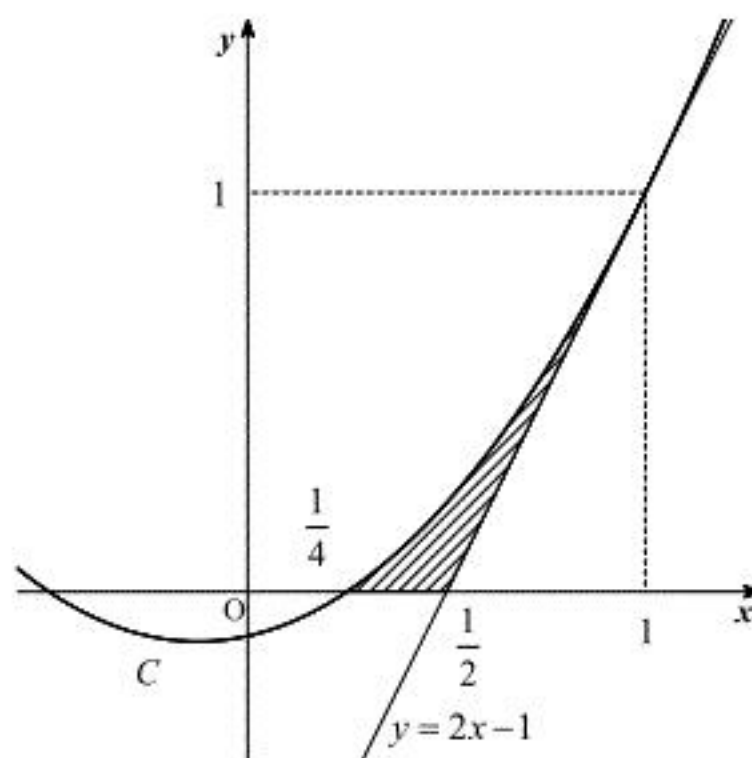
$$c = a - 1$$

$$= -\frac{1}{9}$$

となる。従って C の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{8}{9}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{9}(4x - 1)(2x + 1) \end{aligned}$$

と表せる。



従って、求める部分の面積は上図の斜線部である。これより

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(\frac{8}{9}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{1}{9} \right) dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 &= \left[\frac{8}{27}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{9}x \right]_{\frac{1}{4}}^1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

とわかる。

(答) $\frac{1}{16}$

(1)

数学的帰納法より証明する。

[1] $n=1$ のとき

$n=1$ を代入すると

$$\left(\sum_{k=1}^1 a_k\right)^2 = a_1^2$$

$$1 \cdot \sum_{k=1}^1 a_k^2 = a_1^2$$

となるので、 $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n a_k^2$ が成立する。

[2] $n=l$ での成立を仮定したとき

$n=l+1$ において、与式の右辺から左辺を引くと

$$\begin{aligned} (l+1) \sum_{k=1}^{l+1} a_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{l+1} a_k\right)^2 &= (l+1) \sum_{k=1}^l a_k^2 + (l+1) a_{l+1}^2 - \left(\sum_{k=1}^l a_k + a_{l+1}\right)^2 \\ &= (l+1) \sum_{k=1}^l a_k^2 + (l+1) a_{l+1}^2 - \left\{ \left(\sum_{k=1}^l a_k\right)^2 + 2a_{l+1} \sum_{k=1}^l a_k + a_{l+1}^2 \right\} \\ &= (l+1) \sum_{k=1}^l a_k^2 + l \cdot a_{l+1}^2 - \left(\sum_{k=1}^l a_k\right)^2 - 2a_{l+1} \sum_{k=1}^l a_k \end{aligned}$$

となる。ここで仮定より

$$\left(\sum_{k=1}^l a_k\right)^2 \leq l \cdot \sum_{k=1}^l a_k^2$$

であるから

$$\begin{aligned} (l+1) \sum_{k=1}^{l+1} a_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{l+1} a_k\right)^2 &\geq \left(\frac{l+1}{l} - 1\right) \left(\sum_{k=1}^l a_k\right)^2 - 2a_{l+1} \sum_{k=1}^l a_k + l a_{l+1}^2 \\ &= \frac{1}{l} \left(\sum_{k=1}^l a_k - l a_{l+1}\right)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

となるので、

$$\left(\sum_{k=1}^{l+1} a_k\right)^2 \leq (l+1) \sum_{k=1}^{l+1} a_k^2$$

であり、 $n=l+1$ で成立することがわかる。

以上[1],[2]より、数学的帰納法より

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n a_k^2$$

の成立がわかる。

(証明終)

また、等号が成立するとき

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 &= n \sum_{k=1}^n a_k^2 \\ \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n\right)^2 &= n \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2\right) \\ \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)^2 + 2a_n \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n^2 &= n \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2\right) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $n-1$ での等号が成立しないと仮定すると

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)^2 + 2a_n \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n^2 &> n \left\{ \frac{1}{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)^2 + a_n^2 \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)^2 - 2a_n \sum_{k=1}^{n-1} a_k + (n-1)a_n^2 &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} a_k - (n-1)a_n \right\}^2 &< 0 \end{aligned}$$

となり矛盾する。従って、 $n-1$ での等号は成立し、同様にして n で等号が成立するとき帰納的に $n=1, 2, \dots, n$ で等号が成立する。これより

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)^2 + 2a_n \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n^2 &= n \left\{ \frac{1}{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)^2 + a_n^2 \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)^2 - 2a_n \sum_{k=1}^{n-1} a_k + (n-1)a_n^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} a_k - (n-1)a_n \right\}^2 &= 0 \\ \therefore \sum_{k=1}^{n-1} a_k - (n-1)a_n &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つので、 $n-1=1$ から順に考えていくと

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

が導かれる。逆に $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ とすると

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 &= (na_n)^2 \\ &= n \sum_{k=1}^n a_k^2 \end{aligned}$$

が成立する。従って、求める条件は

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

である。

(答) $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

(2)

1から6の目が出る確率をそれぞれ $a_1, \dots, a_6$ とすると、同じ目が続けて出る確率は $\sum_{k=1}^6 a_k^2$ となる。また

$$\sum_{k=1}^6 a_k = 1$$

より、(1)を用いると

$$\sum_{k=1}^6 a_k^2 \geq \frac{1}{6} \left(\sum_{k=1}^6 a_k\right)^2 = \frac{1}{6}$$

となる。等号が成立する必要十分条件は $a_1 = \dots = a_6 = \frac{1}{6}$ であるが、いまこれが成り立たないので

で等号は成立しない。従って

$$\sum_{k=1}^6 a_k^2 > \frac{1}{6}$$

が成り立つ。

(証明終)

(1)

$f(x) = x(1+x)^n$ とすると、導関数は

$$f'(x) = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1}$$

となるので、二項定理より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^k + nx \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1} C_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^k + n \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1} C_k x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^k + n \sum_{k=1}^n {}_{n-1} C_{k-1} x^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n ({}_n C_k + n \cdot {}_{n-1} C_{k-1}) x^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \left({}_n C_k + n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \right) x^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \left({}_n C_k + k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \right) x^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n ({}_n C_k + k \cdot {}_n C_k) x^k \\ &= \sum_{k=0}^n (1+k) {}_n C_k x^k \end{aligned}$$

となる。従って、 x^k の係数は $(1+k) {}_n C_k$ である。

(答) $(1+k) {}_n C_k$

(2)

(1)より $f'(x)$ に $x=1$ を代入すると

$$\begin{aligned} f'(1) &= 2^n + n2^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^n (1+k) {}_n C_k \end{aligned}$$

となるから

$$\sum_{k=0}^n (1+k) {}_n C_k = (n+2)2^{n-1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

を得る。また

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^k$$

より $x=1$ を代入すると

$$\sum_{k=0}^n {}_n C_k = 2^n \quad \cdots \textcircled{2}$$

を得る。 $\sum_{k=0}^n k^2 {}_n C_k$ は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 {}_n C_k &= \sum_{k=1}^n k^2 {}_n C_k \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=1}^n kn \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n \sum_{k=1}^n k {}_{n-1} C_{k-1} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) {}_{n-1} C_k \end{aligned}$$

と変形できるので、①より

$$\sum_{k=0}^n k^2 {}_n C_k = n(n+1)2^{n-2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

とわかる。従って、①から③より

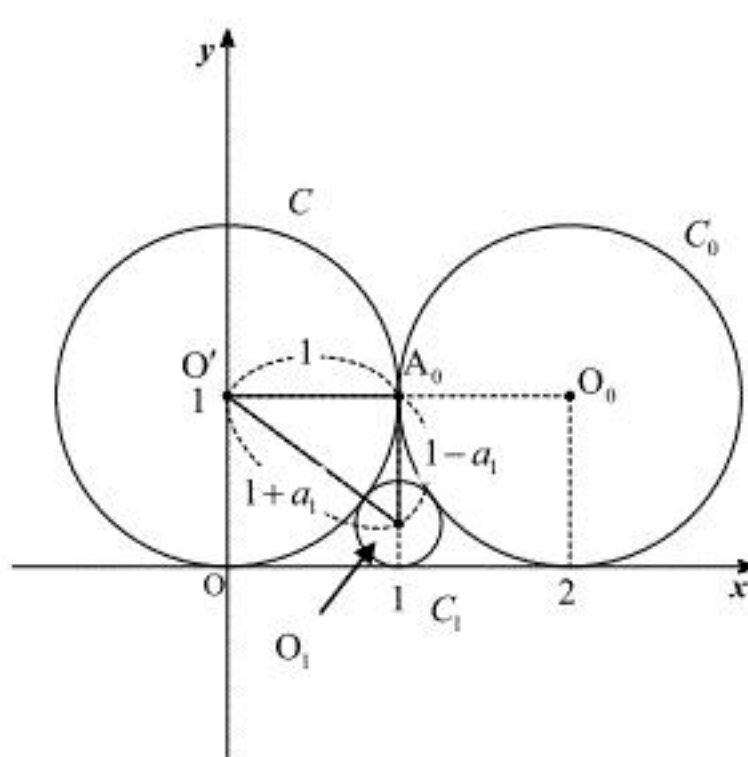
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k+1)^2 \cdot {}_n C_k &= \sum_{k=0}^n (k^2 + 2k + 1) \cdot {}_n C_k \\ &= \sum_{k=0}^n \{k^2 + 2(k+1) - 1\} \cdot {}_n C_k \\ &= n(n+1)2^{n-2} + 2(n+2)2^{n-1} - 2^n \\ &= (n^2 + 5n + 4)2^{n-2} \\ &= (n+1)(n+4)2^{n-2} \end{aligned}$$

が示される。

(証明終)

(1)

0以上の整数 n について、 C_n の中心を O_n 、 C_n と C の接点を A_n とする。また、 C の中心は O' と表す。 C_1 を図示すると下のようになる。



図より $\triangle O'A_1O_1$ に注目して、三平方の定理を用いると

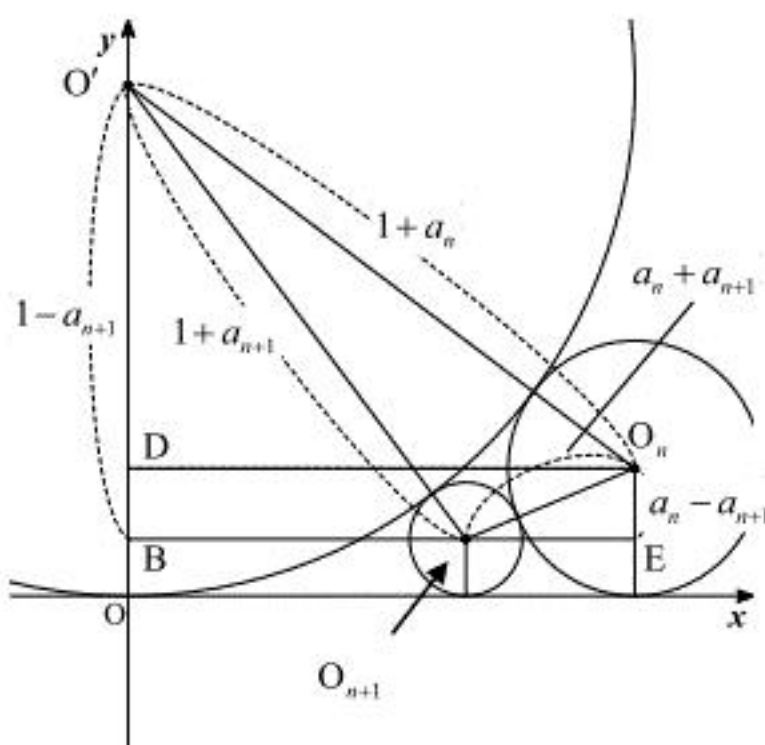
$$\begin{aligned}(1+a_1)^2 &= 1^2 + (1-a_1)^2 \\ \Leftrightarrow 4a_1 &= 1 \\ \therefore a_1 &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad a_1 = \frac{1}{4}$$

(2)

C_n と C_{n+1} を図示すると下のようになる。



図のように点に名前を付ける。 $\triangle O'O_{n+1}B$ に注目して、三平方の定理を用いると

$$\begin{aligned}BO_{n+1}^2 &= (1+a_{n+1})^2 - (1-a_{n+1})^2 \\ &= 4a_{n+1} \\ \therefore BO_{n+1} &= 2\sqrt{a_{n+1}}\end{aligned}$$

と求められる。ただし、点 O_{n+1} は円 C の内部に来ることはないので、 $BO_{n+1} > 0$ となる。また、 $\triangle O'O_{n+1}D$ に注目して、三平方の定理を用いると

$$\begin{aligned}DO_n^2 &= (1+a_n)^2 - (1-a_n)^2 \\ &= 4a_n \\ \therefore DO_n &= 2\sqrt{a_n}\end{aligned}$$

と求められる。ただし、点 O_{n+1} は円 C の内部に来ることはないので、 $DO_n > 0$ となる。これより、 $\triangle O_nEO_{n+1}$ に注目して

$$\begin{aligned}(a_{n+1}+a_n)^2 &= (a_{n+1}-a_n)^2 + (2\sqrt{a_n}-2\sqrt{a_{n+1}})^2 \\ \Leftrightarrow 4a_na_{n+1} &= (2\sqrt{a_n}-2\sqrt{a_{n+1}})^2\end{aligned}$$

となるので、これを整理して

$$\begin{aligned}2\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}} &= 2\sqrt{a_n}-2\sqrt{a_{n+1}} \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}} \quad (\because \sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}} > 0) \\ \therefore b_{n+1} &= 1+b_n\end{aligned}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad b_{n+1} = 1+b_n$$

(3)

$a_1 = \frac{1}{4}$ より $b_1 = 2$ であり、(2)で求めた漸化式より数列 $\{b_n\}$ は公差1の等差数列であるから

$$b_n = n+1$$

とわかる。ここで

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$$

としているので

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{b_n^2} \\ &= \frac{1}{(1+n)^2}\end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{(1+n)^2}$$

$a=0$ のとき不等式は

$$\cos x \leq 1$$

となるので、(*)の条件を満たす。従って、 $a>0$ の範囲を調べればよい。また、 x の範囲は

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

であるが、 $\cos x, 1-ax^2$ はともに偶関数なので、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を考えればよい。ここで、

$$f(x) = 1 - ax^2 - \cos x$$

とにおいて $f(x) \geq 0$ を常に満たすような a を探せばよい。 $f(x)$ を微分することにより

$$f'(x) = -2ax + \sin x$$

$$f''(x) = -2a + \cos x$$

を得るため、以下 a の値で場合分けしていく。

[1] $a > \frac{1}{2}$ のとき

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $f''(x) < 0$ であるから $f'(x)$ は単調減少する。ここで、 $f'(0) = 0$ より

$0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲では

$$f'(x) < 0$$

となるため $f(x)$ は単調減少となり、 $f(0) = 0$ より

$$f(x) < 0 \quad (0 < x \leq \frac{\pi}{2})$$

であるから、(*)を満たす a は存在しない。

[2] $0 < a \leq \frac{1}{2}$ のとき

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で、 $f''(x) = 0$ となる x が存在しその x を α とする。 $f'(x)$ の増減表を書くとな下のようになる。

x	0	...	α	...	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		+	0	-	
$f'(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$1 - \pi a$

[i] $1 - \pi a < 0$ 、すなわち $\frac{1}{\pi} < a \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$f'(\alpha) > 0$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

より、中間値の定理から $\alpha < p < \frac{\pi}{2}$ および $f'(p) = 0$ を満たす実数 p が存在し、区間

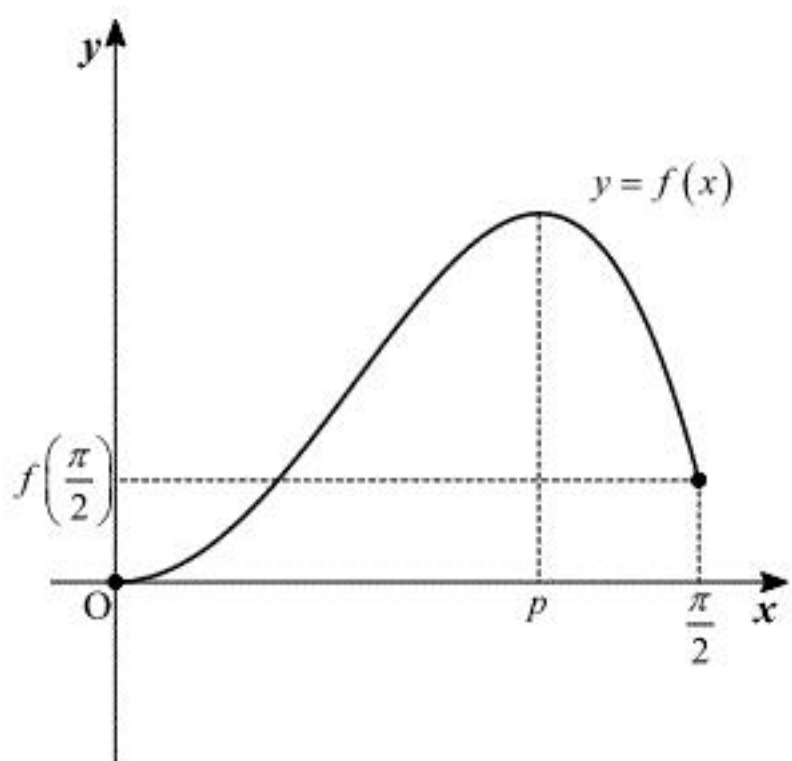
$0 \leq x < p$ において

$$f'(x) > 0$$

となり、区間 $p < x \leq \frac{\pi}{2}$ において

$$f'(x) < 0$$

となる。したがって、 $y = f(x)$ のグラフの概形は以下のようになる。



$f(x) \geq 0$ が常に成り立つのは上図より $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$ のときであり、

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - a \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \cos \frac{\pi}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \leq \frac{4}{\pi^2} \left(> \frac{1}{\pi} \right)$$

となる。

[ii] $1 - \pi a \geq 0$ 、すなわち $0 < a \leq \frac{1}{\pi}$ のとき

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $f'(x) \geq 0$ であるから $f(x)$ は単調増加である。よって、

$f(0) = 0$ より $f(x) \geq 0$ は常に成り立つ。

よって、[i], [ii]より、(*)を満たす a は

$$0 < a \leq \frac{4}{\pi^2}$$

である。

以上[1], [2]より、求める最大の a は $a = \frac{4}{\pi^2}$ となる。

(答) $a = \frac{4}{\pi^2}$