

(1)

3点A(2, -1, 3), B(1, 1, 2), C(4, 1, -1)を通る平面の方程式を

$$ax+by+cz=d \left(a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0 \right)$$

とすると、この平面は3点(2, -1, 3), (1, 1, 2), (4, 1, -1)を通るため、

$$\begin{cases} 2a-b+3c=d & \cdots \textcircled{1} \\ a+b+2c=d & \cdots \textcircled{2} \\ 4a+b-c=d & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

となる。②-③より、

$$-3a+3c=0$$

$$\Leftrightarrow c=a \quad \cdots \textcircled{4}$$

が成り立つ。①+②より、

$$3a+5c=2d$$

$$\Leftrightarrow 8a=2d \left(\because c=a \right)$$

$$\Leftrightarrow d=4a \quad \cdots \textcircled{5}$$

となる。④、⑤を①に代入すると、

$$2a-b+3a=4a$$

$$\Leftrightarrow b=a \quad \cdots \textcircled{6}$$

が成り立つ。ここで $a=0$ とすると、 $a^2+b^2+c^2+d^2=0$ となるので $a \neq 0$ である。したがって平面の方程式は、

$$x+y+z=4 \quad \cdots \textcircled{7}$$

と求まる。⑦に $y=z=0$ を代入すると、

$$x=4$$

となるから、求める点の座標は、

$$(4, 0, 0)$$

である。

(答) (4, 0, 0)

(2)

半角の公式より、

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

であるから

$$1-\cos^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{8}$$

となる。 $0 \leq x < 2\pi$ のとき、

$$\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} < \frac{25}{6}\pi$$

であるから、⑧の解は、

$$2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi$$

$$\Leftrightarrow x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4}{3}\pi$$

と求まる。

(答) $x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4}{3}\pi$

(3)

$t = 2^x + 2^{-x}$ とすると、 $2^x > 0, 2^{-x} > 0$ であるから相加相乗平均より、

$$t \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

である。

$$t^2 = 4^x + 2 + 4^{-x}$$

$$\Leftrightarrow 4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$$

であるから、与えられた方程式は

$$3(4^x + 4^{-x}) - 13(2^x + 2^{-x}) + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(t^2 - 2) - 13t + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 13t + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(3t-10) = 0$$

$$\therefore t = 1, \frac{10}{3}$$

となる。 $t \geq 2$ より、 $t = \frac{10}{3}$ である。 $X = 2^x$ ($X > 0$)とすると、

$$X + X^{-1} = \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3X^2 - 10X + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3X-1)(X-3) = 0$$

$$\therefore X = \frac{1}{3}, 3$$

であり、 $X > 0$ を満たす。したがって求める解は、

$$x = \log_2 3, -\log_2 3$$

と求まる。

(答) $x = \log_2 3, -\log_2 3$

(1)

表が2枚, 1枚, 0枚出る事象をそれぞれ X, Y, Z とし, その事象が起こる確率をそれぞれ $P(X), P(Y), P(Z)$ とすると,

$$P(X) = \frac{1}{4}$$

$$P(Y) = \frac{1}{2}$$

$$P(Z) = \frac{1}{4}$$

である。2回目の操作終了時に, 点Pが頂点Aにあるとき, 起こる事象の組み合わせが

$$(X, Y), (Z, Z)$$

となればよい。事象の起こる順列を考えると, それぞれ $2! = 2$ 通り, 1通りあるから, 求める確率は

$$\begin{aligned} 2 \cdot P(X) \cdot P(Y) + P^2(Z) &= 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{5}{16}$

(2)

4回目の操作終了時に, 点Pが頂点Aにあるとき, 起こる事象の組み合わせが

$$(X, X, Y, Y), (X, X, X, Z), (Y, Y, Y, Z), (X, Y, Z, Z), (Z, Z, Z, Z)$$

となればよい。事象の起こる順列を考えると, それぞれ $\frac{4!}{2!2!} = 6$ 通り, $\frac{4!}{3!} = 4$ 通り, $\frac{4!}{3!} = 4$ 通

り, $\frac{4!}{2!} = 12$ 通り, 1通りあるから, 求める確率は

$$\begin{aligned} &6 \cdot P^2(X) \cdot P^2(Y) + 4 \cdot P^3(X) \cdot P(Z) + 4 \cdot P^3(Y) \cdot P(Z) + 12 \cdot P(X) \cdot P(Y) \cdot P^2(Z) + P^4(Z) \\ &= 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 12 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot (24 + 4 + 32 + 24 + 1) \\ &= \frac{85}{256} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{85}{256}$

(1)

与えられた2次方程式の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= a^2 - (3a^2 - 2a - 4) \\ &= -2a^2 + 2a + 4\end{aligned}$$

である。2次方程式の解がともに実数となるとき $D \geq 0$ となるから、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -2a^2 + 2a + 4 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - a - 2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (a+1)(a-2) &\leq 0 \\ \therefore -1 &\leq a \leq 2\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $-1 \leq a \leq 2$

(2)

解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2a \\ \alpha\beta = 3a^2 - 2a - 4 \end{cases}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= (-2a)^3 - 3(3a^2 - 2a - 4)(-2a) \\ &= -8a^3 + 6a(3a^2 - 2a - 4) \\ &= -8a^3 + 18a^3 - 12a^2 - 24a \\ &= 10a^3 - 12a^2 - 24a\end{aligned}$$

となる。 $f(a) = 10a^3 - 12a^2 - 24a$ とすると、導関数は

$$\begin{aligned}f'(a) &= 30a^2 - 24a - 24 \\ &= 6(5a^2 - 4a - 4)\end{aligned}$$

と求まる。方程式 $5a^2 - 4a - 4 = 0$ を計算すると、

$$\begin{aligned}5a^2 - 4a - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{5}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $4 < \sqrt{24} < 5$ より、

$$\begin{aligned}-1 &< \frac{2 - 2\sqrt{6}}{5} \\ \frac{2 + 2\sqrt{6}}{5} &< 2\end{aligned}$$

だから、 $-1 \leq a \leq 2$ における $f(a)$ の増減表は次のようになる。

a	-1	...	$\frac{2-2\sqrt{6}}{5}$	...	$\frac{2+2\sqrt{6}}{5}$	...	2
$f'(a)$		+	0	-	0	+	
$f(a)$	$f(-1)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$f(2)$

$f(a)$ は

$$\begin{aligned}f(a) &= 10a^3 - 12a^2 - 24a \\ &= 2a(5a^2 - 4a - 4) - 4a^2 - 16a\end{aligned}$$

と変形でき、 $a = \frac{2-2\sqrt{6}}{5}$ のとき $5a^2 - 4a - 4 = 0$ であるから、

$$\begin{aligned}f\left(\frac{2-2\sqrt{6}}{5}\right) &= -4\left(\frac{2-2\sqrt{6}}{5}\right)^2 - 16 \cdot \frac{2-2\sqrt{6}}{5} \\ &= -4 \cdot \frac{4+24-8\sqrt{6}}{25} - 16 \cdot \frac{2-2\sqrt{6}}{5} \\ &= \frac{-272+192\sqrt{6}}{25}\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}f(2) &= 10 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 \\ &= -16\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}\sqrt{6} &> 2 \\ \Leftrightarrow 192\sqrt{6} &> 384 \\ \Leftrightarrow -272+192\sqrt{6} &> 112 \\ \Leftrightarrow \frac{-272+192\sqrt{6}}{25} &> \frac{112}{25}\end{aligned}$$

であるから $f\left(\frac{2-2\sqrt{6}}{5}\right) > 0 > f(2)$ となる。以上より、 $a = \frac{2-2\sqrt{6}}{5}$ のとき $\alpha^3 + \beta^3$ は最大値

$\frac{-272+192\sqrt{6}}{25}$ をとる。

(答) $\frac{-272+192\sqrt{6}}{25}$

(1)

a_n の式を計算すると、

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \left(-\frac{1}{n} \cos nx \right)' dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \cos nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{2\pi}{n} \cos n\pi \right) + \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{2\pi}{n} \cos n\pi \right) \\
 &= -\frac{2}{n} (-1)^n \left(\because \cos n\pi = (-1)^n \right)
 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
 a_n^2 &= \left\{ -\frac{2}{n} (-1)^n \right\}^2 \\
 &= \frac{4}{n^2} (-1)^{2n} \\
 &= \frac{4}{n^2} \{ (-1)^2 \}^n \\
 &= \frac{4}{n^2} \cdot 1^n \\
 &= \frac{4}{n^2}
 \end{aligned}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \left(\because \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2}{3} \pi^3 \\
 &= \frac{\pi^2}{6}
 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{\pi^2}{6}$

(2)

与えられた等式の両辺に $x^2(x+1)$ をかけると、

$$\begin{aligned}
 1 &= ax(x+1) + b(x+1) + cx^2 \\
 \Leftrightarrow 1 &= (a+c)x^2 + (a+b)x + b
 \end{aligned}$$

となる。この等式が x についての恒等式となるため、係数を比較すると、

$$\begin{cases} a+c=0 \\ a+b=0 \\ b=1 \end{cases}$$

となる。これを解くと、

$$a = -1, b = 1, c = 1$$

と求まる。

(答) $a = -1, b = 1, c = 1$

(3)

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$ について、その第 m 項までの部分 and $S_m = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2(n+1)}$ を考える。(2)より、

$$\begin{aligned}
 S_m &= \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2(n+1)} \\
 &= \sum_{n=1}^m \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^m \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} \\
 &= \left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(-\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} \right) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} \\
 &= -1 + \frac{1}{m+1} + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2}
 \end{aligned}$$

である。(1)より、 $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ であるから、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = -1 + \frac{\pi^2}{6}$$

である。よって、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$ は収束し、その和は $-1 + \frac{\pi^2}{6}$ である。

(答) $-1 + \frac{\pi^2}{6}$