経済学部
理 学 部
医 学 部

前期日程

# 平成 27 年度入学試験問題

# 数　学

## 注 意 事 項

1. この問題冊子は試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 解答用紙は問題冊子とは別になっているので，解答はすべて解答用紙の指定されたところに記入すること。また，解答用紙は問題ごとに別になっているので，注意すること。
3. 受験番号を解答用紙の指定されたところへ必ず記入すること。決して氏名を書いてはいけない。
4. この問題冊子は持ち帰ること。

## 解答にあたっての注意事項

この問題冊子には，経済学部，理学部，医学部の問題がある。受験者は下の表にしたがって，志望学部学科の問題を解答すること。

| 学 部 | 学　科 | 解 答 す る 問 題 |
|---|---|---|
| 経済学部 | 経 済 学 科<br>経済システム法学科 | 1，2，3，4 の 4 問 |
| 理 学 部 | 数　学　科 | 2，3，4，5，6，7 の 6 問 |
| 医 学 部 | 医　学　科 | 3，4，5，6，7 の 5 問 |
| | 保 健 学 科 | 1，2，3，4 の 4 問 |

ITO. ⑤

$\boxed{1}$ 原点を中心とする半径1の円Oの上に，3点 $A\left(0,\ 1\right)$，$B\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$，$C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ をとる。線分ACの中点をM，線分BCの中点をNとする。2点M，Nを通る直線が円Oと交わる2点のうち，Nに近い方の交点をQとする。このとき，線分NQの長さを求めよ。

**2** 次の 3 つの条件を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ を考える。

(i) $x$ は奇数である。

(ii) $x^2 + y^2 = z^2$

(iii) $x, y, z$ の最大公約数は 1 である。

例えば $(x,\ y,\ z) = (3,\ 4,\ 5),\ (5,\ 12,\ 13)$ などがその例である。

(1) $y$ は偶数であることを示せ。

(2) $x = a^2 - b^2,\ \ y = 2ab$ となる自然数 $a, b$ が存在することを示せ。

(3) 条件を満たす $(x,\ y,\ z)$ で，$(3,\ 4,\ 5)$ と $(5,\ 12,\ 13)$ 以外のものを 2 組求めよ。

**3** 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ を $C$ とし，直線 $y = 2x - 1$ を $\ell$ とする。

(1) 放物線 $C$ が点 $(1, 1)$ で直線 $\ell$ と接し，かつ $x$ 軸と共有点をもつための $a, b, c$ が満たす必要十分条件を求めよ。

(2) $a = \dfrac{8}{9}$ のとき，(1) の条件のもとで，放物線 $C$ と直線 $\ell$ および $x$ 軸とで囲まれた部分のうち，第 1 象限にある部分の面積を求めよ。

**4** 次の問いに答えよ。

(1) $n$ 個の実数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ に対して

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqq n \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$$

が成立することを示せ。また，等号が成立するための $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ についての必要十分条件を求めよ。

(2) 偏りをもつサイコロを 2 回投げるとき，同じ目が続けて出る確率は $\dfrac{1}{6}$ よりも大きいことを示せ。ただし，サイコロが偏りをもつとは，1 から 6 の目が同様に確からしく出ないことをいう。

$\boxed{5}$ $n$ を自然数とする。

(1) $n$ 以下の非負の整数 $k$ について，関数 $x(1+x)^n$ の導関数の $x^k$ の係数を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2{}_nC_k=(n+1)(n+4)2^{n-2}$ を示せ。

**6** 円 $x^2+(y-1)^2=1$ を $C$，円 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ を $C_0$ とする。$C$, $C_0$, $x$ 軸に接する円を $C_1$ とする。$C$, $C_1$, $x$ 軸に接し $C_0$ と異なる円を $C_2$ とし，これを繰り返して $C$, $C_n$, $x$ 軸に接し $C_{n-1}$ と異なる円を $C_{n+1}$ とする。また，円 $C_n$ の半径を $a_n$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_1$ を求めよ。

(2) $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ の満たす漸化式を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{7}$ 次の条件 $(*)$ を満たすような実数 $a$ で最大のものを求めよ。

$(*)$ $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲のすべての $x$ に対して

$$\cos x \leqq 1 - ax^2$$

が成り立つ。