

(1)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1 \text{ から}$$

$$f'(x) = x$$

であるから、 $(a_n, f(a_n))$ における接線の方程式は

$$y = a_n(x - a_n) + f(a_n) = a_n x - \frac{1}{2}a_n^2 - 1$$

となる。この直線と x 軸との交点の x 座標は、 $a_n \neq 0$ のとき

$$a_n x - \frac{1}{2}a_n^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}$$

となる。よって $a_n \neq 0$ のとき

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となるから、 $a_1 = 2$ のとき

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{a_1} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{a_2} = \frac{17}{12}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{17}{12}$$

(2)

①式より、 $a_1 > 0$ のときすべての自然数 n に対して $a_n > 0$ であることが帰納的にわかる。

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}$$

であるから、 $a_{n+1} - a_n > 0$ とおくと、

$$-\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n} > 0$$

$$\Leftrightarrow a_n^2 - 2 < 0 \quad (\because a_n > 0)$$

$$\therefore 0 < a_n < \sqrt{2} \quad (\because a_n > 0)$$

となり、同様の議論によって

$$\begin{cases} 0 < a_n < \sqrt{2} \text{ のとき } a_{n+1} > a_n \\ a_n = \sqrt{2} \text{ のとき } a_n = a_{n+1} \\ a_n > \sqrt{2} \text{ のとき } a_{n+1} < a_n \end{cases}$$

となる。ここで、①式と $a_n > 0$ から相加相乗平均の関係より

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = \sqrt{2}$$

となり、等号は

$$\frac{1}{2}a_n = \frac{1}{a_n}$$

$$\Leftrightarrow a_n = \sqrt{2} \quad (\because a_n > 0)$$

のときのみ成り立つ。よって、 $0 < a_1 < \sqrt{2}$ のとき $a_2 > \sqrt{2}$ であり、 $a_2 > a_3, a_3 > \sqrt{2}$ であるから、 $a_1 < \sqrt{2} < a_3 < a_2$ である。また、 $a_1 = \sqrt{2}$ のときは $a_1 = a_2 = a_3 = \sqrt{2}$ であり、 $a_1 > \sqrt{2}$ のときは $\sqrt{2} < a_3 < a_2 < a_1$ が成り立つ。以上のことから、

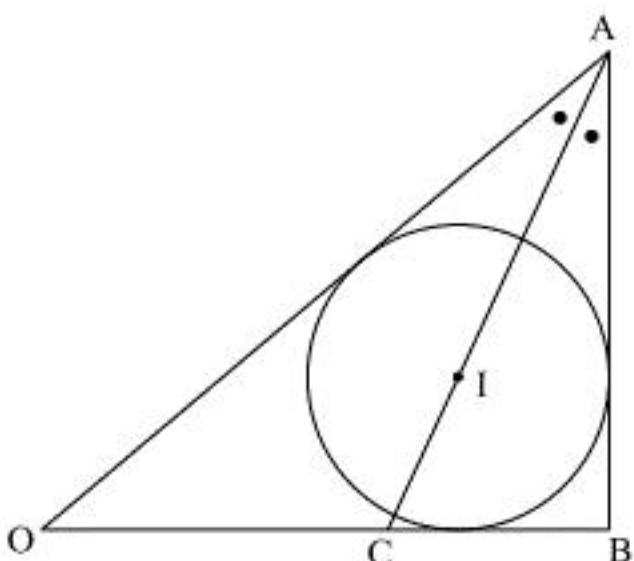
$$\begin{cases} 0 < a_1 < \sqrt{2} \text{ のとき } a_1 < a_3 < a_2 \\ a_1 = \sqrt{2} \text{ のとき } a_1 = a_2 = a_3 \\ a_1 > \sqrt{2} \text{ のとき } a_3 < a_2 < a_1 \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} 0 < a_1 < \sqrt{2} \text{ のとき } a_1 < a_3 < a_2 \\ a_1 = \sqrt{2} \text{ のとき } a_1 = a_2 = a_3 \\ a_1 > \sqrt{2} \text{ のとき } a_3 < a_2 < a_1 \end{cases}$$

2

(1)



三角形の内心の性質から、

$$\angle OAC = \angle CAB$$

となるので、角の二等分線の定理より

$$\begin{aligned} OC : CB &= OA : AB \\ \Leftrightarrow OC : OB &= OA : (OA + AB) \\ \Leftrightarrow OC &= \frac{OA \cdot OB}{OA + AB} \end{aligned}$$

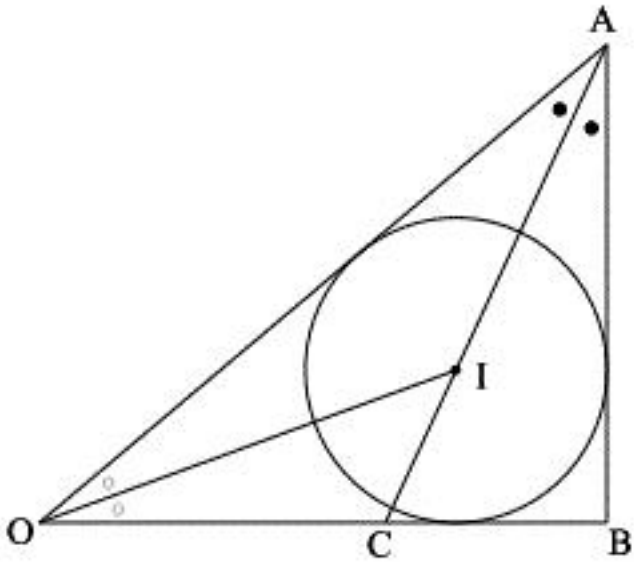
となる。点 C は線分 OB 上にあるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= OC \cdot \frac{\overrightarrow{OB}}{OB} \\ &= \frac{OA \cdot OB}{OA + AB} \cdot \frac{\overrightarrow{OB}}{OB} \\ &= \frac{OA \cdot \overrightarrow{OB}}{OA + AB} \\ &= \frac{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{AB}|} \end{aligned}$$

となり、題意は示された。

(証明終)

(2)



△OAC について角の二等分線の定理より

$$CI : IA = OC : OA$$

となるから

$$\overrightarrow{OI} = \frac{CI \cdot \overrightarrow{OA} + IA \cdot \overrightarrow{OC}}{AC} = \frac{OC \cdot \overrightarrow{OA} + OA \cdot \overrightarrow{OC}}{OC + OA}$$

となる。これを $OC = \frac{OA \cdot OB}{OA + AB}$ と(1)の結果を用いて整理すると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI} &= \frac{OC \cdot \overrightarrow{OA} + OA \cdot \overrightarrow{OC}}{OC + OA} \\ &= \frac{\frac{OA \cdot OB}{OA + AB} \cdot \overrightarrow{OA} + OA \cdot \frac{OA \cdot \overrightarrow{OB}}{OA + AB}}{\frac{OA \cdot OB}{OA + AB} + OA} \\ &= \frac{OB \cdot \overrightarrow{OA} + OA \cdot \overrightarrow{OB}}{OA + OB + AB} \\ &= \frac{|\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OB}| + |\overrightarrow{AB}|} \end{aligned}$$

となるから、題意は示された。

(証明終)

(3)

$\angle AOB = \theta$ とおくと、

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$$

となる。また、 $\angle OBA = 90^\circ$ であることから、

$$\tan \theta = \frac{q}{p}$$

となる。よって倍角の公式より

$$\begin{aligned} \frac{q}{p} &= \tan \theta \\ &= \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{q}{p} = \frac{4}{3}$