

(1)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1 \text{ から}$$

$$f'(x) = x$$

であるから、 $(a_n, f(a_n))$ における接線の方程式は

$$y = a_n(x - a_n) + f(a_n) = a_n x - \frac{1}{2}a_n^2 - 1$$

となる。この直線と x 軸との交点の x 座標は、 $a_n \neq 0$ のとき

$$a_n x - \frac{1}{2}a_n^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}$$

となる。よって $a_n \neq 0$ のとき

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n} \quad \dots \textcircled{1}$$

となるから、 $a_1 = 2$ のとき

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{a_1} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{a_2} = \frac{17}{12}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{17}{12}$$

(2)

①式より、 $a_1 > 0$ のときすべての自然数 n に対して $a_n > 0$ であることが帰納的にわかる。

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}$$

であるから、

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

として a_n と a_{n+1} の大小を考える。

$$g'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} < 0$$

であるから、 $g(x)$ は単調減少である。また、

$$g(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \quad (\because x > 0)$$

であるから、

$$\begin{cases} 0 < x < \sqrt{2} \text{ のとき } g(x) > 0 \\ x = \sqrt{2} \text{ のとき } g(x) = 0 \\ x > \sqrt{2} \text{ のとき } g(x) < 0 \end{cases}$$

である。つまり

$$\begin{cases} 0 < a_n < \sqrt{2} \text{ のとき } a_{n+1} > a_n \\ a_n = \sqrt{2} \text{ のとき } a_n = a_{n+1} \\ a_n > \sqrt{2} \text{ のとき } a_{n+1} < a_n \end{cases}$$

となる。ここで、①式と $a_n > 0$ から相加相乗平均の関係より

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = \sqrt{2}$$

となり、等号は

$$\frac{1}{2}a_n = \frac{1}{a_n}$$

$$\Leftrightarrow a_n = \sqrt{2} \quad (\because a_n > 0)$$

のとき成り立つ。以上のことから、

$$\begin{cases} 0 < a_1 < \sqrt{2} \text{ のとき } a_1 < a_3 < a_2 \\ a_1 = \sqrt{2} \text{ のとき } a_1 = a_2 = a_3 \\ a_1 > \sqrt{2} \text{ のとき } a_3 < a_2 < a_1 \end{cases}$$

となる。

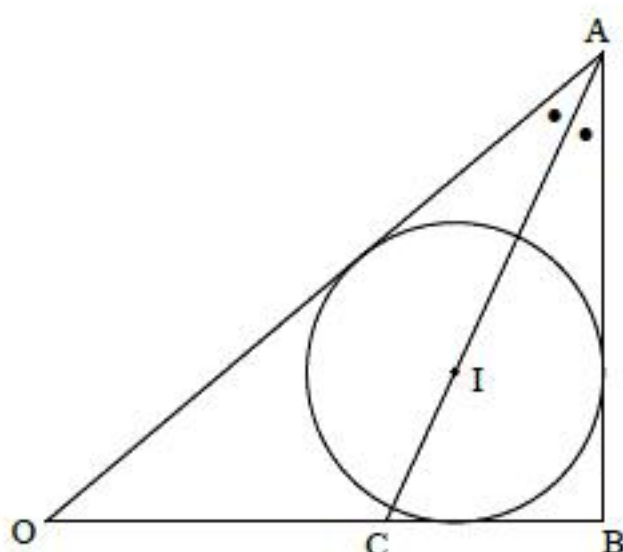
$$0 < a_1 < \sqrt{2} \text{ のとき } a_1 < a_3 < a_2$$

$$(\text{答}) \quad a_1 = \sqrt{2} \text{ のとき } a_1 = a_2 = a_3$$

$$a_1 > \sqrt{2} \text{ のとき } a_3 < a_2 < a_1$$

2

(1)



三角形の内心の性質から、

$$\angle OAC = \angle CAB$$

となるので、角の二等分線の定理より

$$OC : CB = OA : AB$$

$$\Leftrightarrow OC : OB = OA : OA + AB$$

$$\Leftrightarrow OC = \frac{OA \cdot OB}{OA + AB}$$

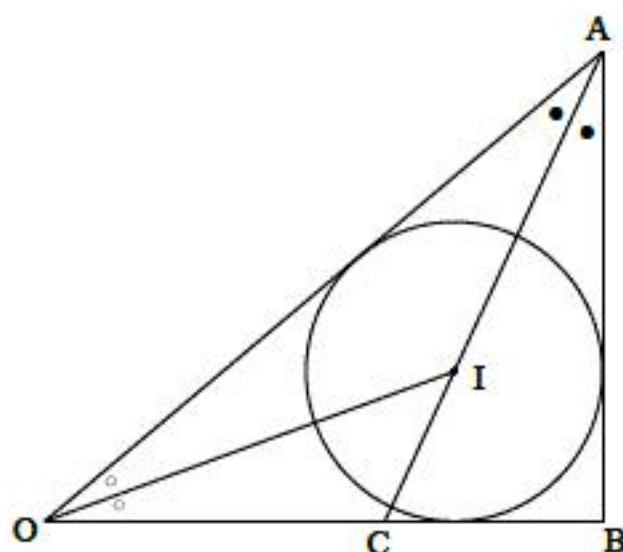
となる。点Cは線分OB上にあるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= OC \cdot \frac{\overrightarrow{OB}}{OB} \\ &= \frac{OA \cdot OB}{OA + AB} \cdot \frac{\overrightarrow{OB}}{OB} \\ &= \frac{OA \cdot \overrightarrow{OB}}{OA + AB} \\ &= \frac{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{AB}|} \end{aligned}$$

となり、題意は示された。

(証明終)

(2)



$\triangle OAC$ について角の二等分線の定理より

$$CI : IA = OC : OA$$

となるから

$$\overrightarrow{OI} = \frac{CI \cdot \overrightarrow{OA} + IA \cdot \overrightarrow{OC}}{AC} = \frac{OC \cdot \overrightarrow{OA} + OA \cdot \overrightarrow{OC}}{OC + OA}$$

となる。これを $OC = \frac{OA \cdot OB}{OA + AB}$ と(1)の結果を用いて整理すると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI} &= \frac{OC \cdot \overrightarrow{OA} + OA \cdot \overrightarrow{OC}}{OC + OA} \\ &= \frac{\frac{OA \cdot OB}{OA + AB} \cdot \overrightarrow{OA} + OA \cdot \frac{OA \cdot \overrightarrow{OB}}{OA + AB}}{\frac{OA \cdot OB}{OA + AB} + OA} \\ &= \frac{OB \cdot \overrightarrow{OA} + OA \cdot \overrightarrow{OB}}{OA + OB + AB} \\ &= \frac{|\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OB}| + |\overrightarrow{AB}|} \end{aligned}$$

となるから、題意は示された。

(証明終)

(3)

$\angle AOB = \theta$ とおくと、

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$$

となる。また、 $\angle OBA = 90^\circ$ であることから、

$$\tan \theta = \frac{q}{p}$$

となる。よって倍角の公式より

$$\begin{aligned} \frac{q}{p} &= \tan \theta \\ &= \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{q}{p} = \frac{4}{3}$

(1)

直線と楕円が異なる2点で交わる条件は、直線が y 軸に平行でないことから、二つの方程式から y を消去した2次方程式

$$x^2 + \left\{ \frac{m(x - \sqrt{2})}{2} \right\}^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 4)x^2 - 2\sqrt{2}m^2x + 2m^2 - 4 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が異なる2つの解をもつことである。つまり、①式の判別式を D とすると $D > 0$ のとき、直線と楕円は異なる2点で交わる。このとき

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (\sqrt{2}m^2)^2 - (m^2 + 4)(2m^2 - 4) \\ &= -4m^2 + 16 \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -2 < m < 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。 m が②を満たすとき、①の実数解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{2\sqrt{2}m^2}{m^2 + 4}$$

となる。よって2つの交点の中点の x 座標 X は

$$X = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\sqrt{2}m^2}{m^2 + 4} \quad \dots \textcircled{3}$$

であり、 y 座標 Y は中点が直線 ℓ 上にあることから

$$Y = m(X - \sqrt{2})$$

となる。ここで直線 $x = \sqrt{2}$ は楕円 C の外側にあるから、 $X - \sqrt{2} \neq 0$ となるので

$$m = \frac{Y}{X - \sqrt{2}}$$

となる。これを③式を変形した $(X - \sqrt{2})m^2 + 4X = 0$ に代入して整理すると

$$\begin{aligned} (X - \sqrt{2}) \left(\frac{Y}{X - \sqrt{2}} \right)^2 + 4X &= 0 \\ \Leftrightarrow Y^2 + 4X(X - \sqrt{2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \sqrt{2} \left(X - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}^2 + \left(\frac{Y}{\sqrt{2}} \right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

となる。さらに③より

$$X = \frac{\sqrt{2}(m^2 + 4) - 4\sqrt{2}}{m^2 + 4} = \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{m^2 + 4}$$

であるから、②より

$$0 \leq X < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

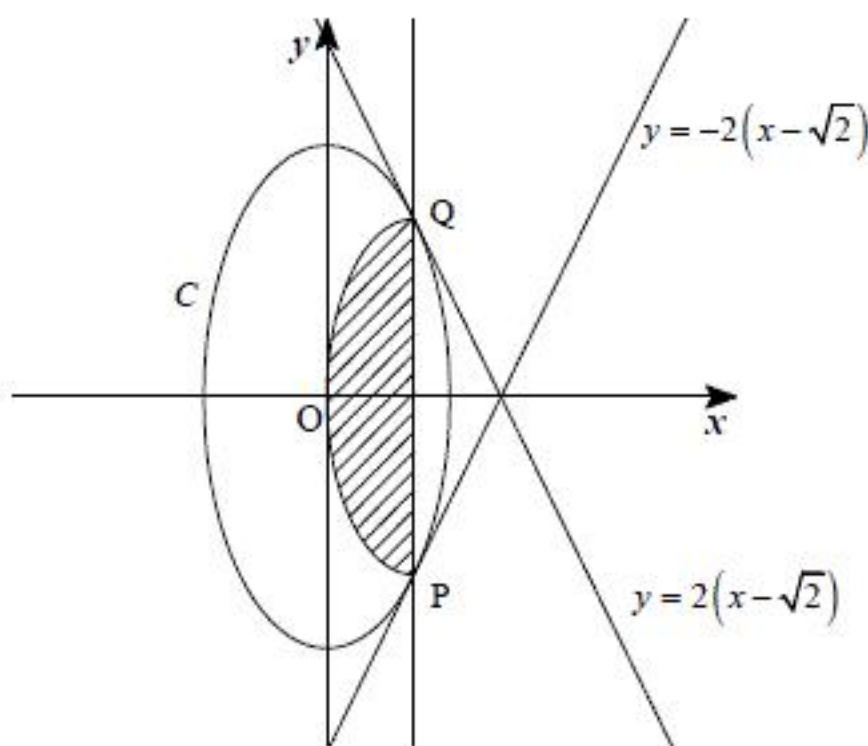
となる。よって求める軌跡は

$$\text{曲線} \left\{ \sqrt{2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1 \quad (0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}})$$

となる。

$$(\text{答}) \text{ 曲線 } \left\{ \sqrt{2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1 \quad (0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}})$$

(2)



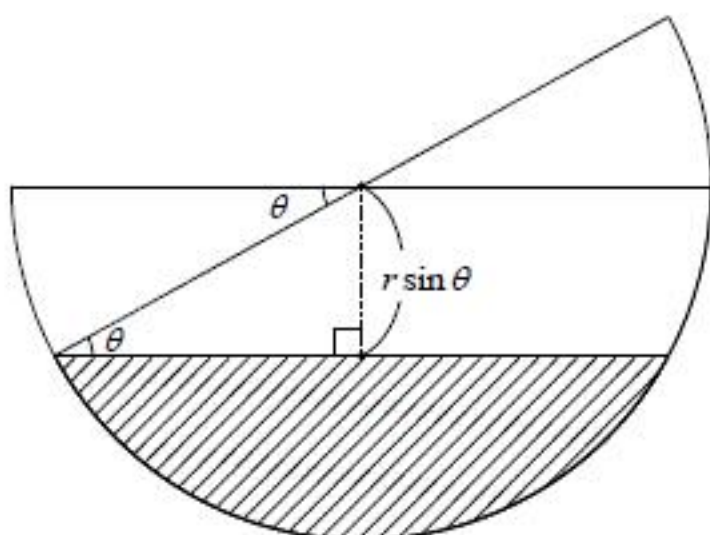
上図斜線部の面積を求めればよい。 $\left\{ \sqrt{2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1$ について、 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき y は

最大値と最小値をとるから、(1)で求めた曲線は楕円の周の左半分である。よって楕円

$\left\{ \sqrt{2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1$ の面積の半分が求める値であるから

$$\frac{1}{2} \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{\pi}{2}$$

となる。



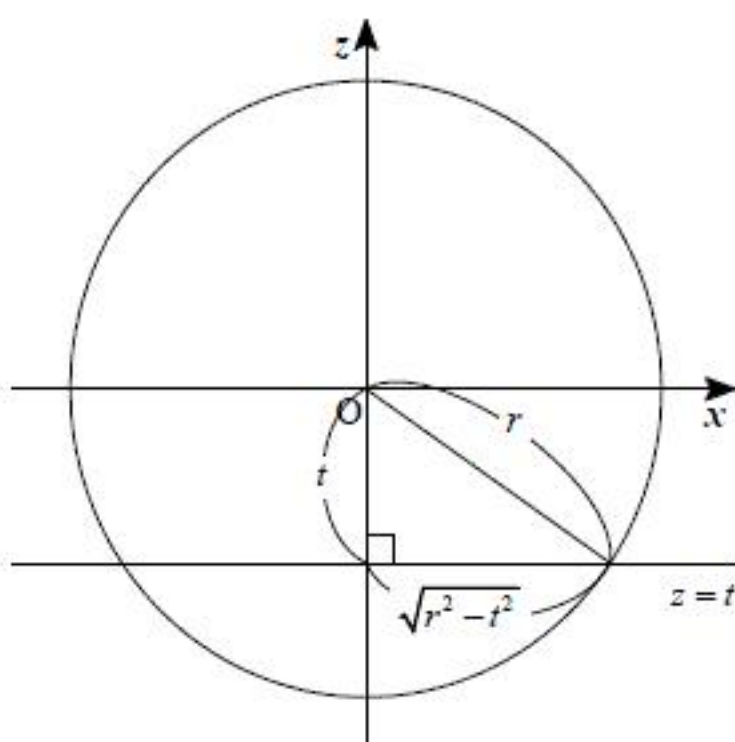
容器を傾けると、水は上図の斜線部の部分にたまる。よって、

$$(\text{斜線部の体積 } V) : (\text{半球の体積}) = 5 : 16$$

となるような θ の値を求めればよい。上図のように球の中心から水面に垂線を下すと、同位角を考えて、垂線の長さは $r \sin \theta$ になることがわかる。ここで、斜線部の体積を考えるために座標空間上に半球を配置することを考える。半球を含む球の方程式を

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

とする。



平面 $z = t$ での球の切断面は、上図から分かるように半径 $\sqrt{r^2 - t^2}$ の円であるから、その面積は $\pi(r^2 - t^2)$ となる。よって斜線部の体積は $\pi(r^2 - t^2)$ を t について $-r \rightarrow -r \sin \theta$ で積分すればよいことになるから

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{-r \sin \theta} \pi(r^2 - t^2) dt \\ &= \left[\pi \left(r^2 t - \frac{1}{3} t^3 \right) \right]_{-r}^{-r \sin \theta} \\ &= \frac{\pi r^3}{3} (\sin^3 \theta - 3 \sin \theta + 2) \end{aligned}$$

となる。もともと入っていた水の体積は半球の体積に等しく $\frac{2}{3} \pi r^3$ であるから、

$$\begin{aligned} V : \frac{2}{3} \pi r^3 &= 5 : 16 \\ \Leftrightarrow \frac{\pi r^3}{3} (\sin^3 \theta - 3 \sin \theta + 2) : \frac{2}{3} \pi r^3 &= 5 : 16 \\ \Leftrightarrow 8 \sin^3 \theta - 24 \sin \theta + 11 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 \sin \theta - 1)(4 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta - 11) &= 0 \end{aligned}$$

となるが、 θ は明らかに $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす ($\theta \geq \frac{\pi}{2}$ になると水がすべてこぼれる) ので

$0 < \sin \theta < 1$ であり、

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{6} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。