

(1)

共分散の定義式

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \right)$$

を展開すると

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n (x_k y_k - \bar{y} x_k - \bar{x} y_k + \bar{x} \bar{y}) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right) - \frac{\bar{y}}{n} \sum_{k=1}^n x_k - \frac{\bar{x}}{n} \sum_{k=1}^n y_k + \bar{x} \bar{y} \end{aligned}$$

となるが、 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \bar{x}$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \bar{y}$ であるから

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right) - \bar{x} \bar{y} - \bar{x} \bar{y} + \bar{x} \bar{y} \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right) - \bar{x} \bar{y} \end{aligned}$$

となり、題意は示された。

(証明終)

(2)

 $y_k = ax_k + b$ のとき、

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (ax_k + b) \\ &= \frac{a}{n} \sum_{k=1}^n x_k + b \\ &= a\bar{x} + b \end{aligned}$$

となり、変量 y の標準偏差 s_y について

$$\begin{aligned} s_y &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{ax_k + b - (a\bar{x} + b)\}^2} \\ &= |a| \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} \\ &= |a| s_x \end{aligned}$$

となり、共分散について

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \frac{a}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = a s_x^2$$

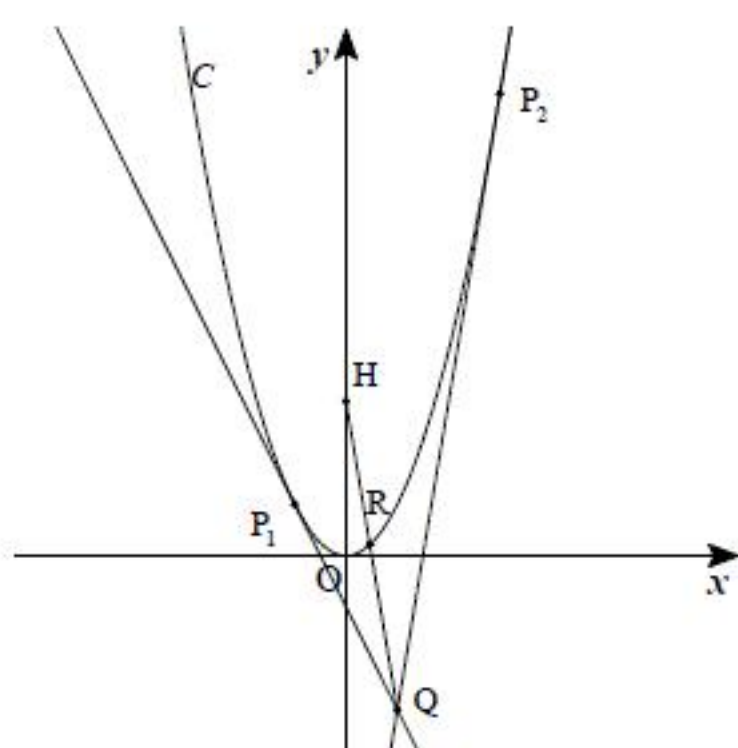
となる。相関係数は $\frac{s_{xy}}{s_x s_y}$ と表されるから、 $a \neq 0, s_x \neq 0$ より

$$\frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{a s_x^2}{|a| s_x^2} = \frac{a}{|a|}$$

となる。

(答) $\frac{a}{|a|}$

2



(1)

点Hの座標は

$$\left(\frac{-1 \cdot 3 + 3 \cdot 1}{4}, \frac{1 \cdot 3 + 9 \cdot 1}{4} \right) = (0, 3)$$

となる。

(答) H(0, 3)

(2)

 $y = x^2$ より $y' = 2x$ であるから、 P_1 における C の接線の方程式は

$$y = -2(x+1)+1 = -2x-1$$

であり、 P_2 における C の接線の方程式は

$$y = 6(x-3)+9 = 6x-9$$

となるから、これらの交点である Q の座標は

$$\begin{cases} y = -2x-1 \\ y = 6x-9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2x-1 = 6x-9$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$\therefore (x, y) = (1, -3)$$

となる。

(答) Q(1, -3)

(3)

直線HQは2点H(0, 3), Q(1, -3)を通る直線であるから、求める方程式は

$$y = \frac{-3-3}{1-0}x+3 = -6x+3$$

となる。

(答) $y = -6x+3$

(4)

点Rは線分HQと C の交点であるから、

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -6x+3 \end{cases}$$

の交点のうち、2点H(0, 3), Q(1, -3)の間にあるものである。よって点Rの x 座標は

$$x^2 = -6x+3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x - 3 = 0$$

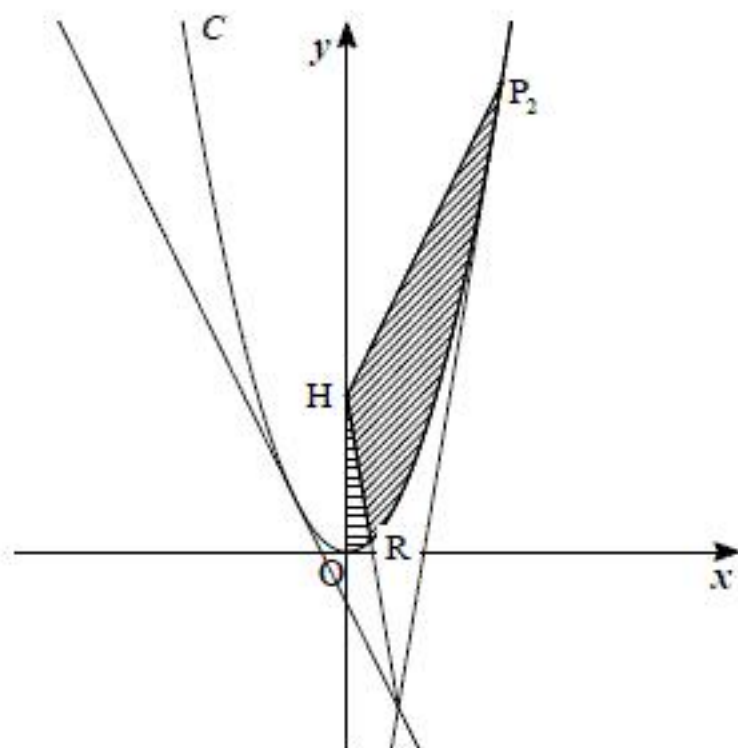
$$\therefore x = -3 + 2\sqrt{3} \quad (\because 0 < x < 1)$$

であり、 y 座標は

$$y = -6(-3+2\sqrt{3})+3 = 21-12\sqrt{3}$$

となる。よって、求める座標は $(-3+2\sqrt{3}, 21-12\sqrt{3})$ となる。(答) $(-3+2\sqrt{3}, 21-12\sqrt{3})$

(5)



上図斜線部の面積を求めればよい。その際、横線部と斜線部を合わせた部分の面積を求めたのち、横線部の面積を引くことで答えを求める。直線 P_2H の方程式は

$$y = \frac{9-3}{3-0}x+3 = 2x+3$$

であり、直線HRの方程式は(4)より $-6x+3$ であるから、求める面積は

$$\int_0^3 (2x+3-x^2) dx - \int_0^{-3+2\sqrt{3}} (-6x+3-x^2) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_0^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 3x \right]_0^{-3+2\sqrt{3}}$$

$$= 9+27-16\sqrt{3}$$

$$= 36-16\sqrt{3}$$

となる。

(答) $36-16\sqrt{3}$

(1)

$\triangle OAB$ について、 $OA = \frac{1}{2}$, $OB = 1$, $\angle AOB = \alpha$ であるから、面積は

$$s = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \alpha = \frac{1}{4} \sin \alpha$$

となる。また、

$$4\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 1$$

$$\Leftrightarrow |\overline{OA}| |\overline{OC}| \cos \beta = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow |\overline{OC}| = \frac{1}{2 \cos \beta} \left(\because |\overline{OA}| = \frac{1}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \beta \neq 0 \right)$$

となるから、 $\triangle OAC$ の面積は

$$t = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OC \cdot \sin \beta = \frac{1}{8} \tan \beta$$

となる。また、 $\triangle OBC$ の面積は

$$u = \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{4 \cos \beta}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{1}{4} \sin \alpha, t = \frac{1}{8} \tan \beta, u = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{4 \cos \beta}$$

(2)

$2s = u$ より

$$2 \cdot \frac{\sin \alpha}{4} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{4 \cos \beta}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \alpha \cos \beta = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha - \beta) = 0$$

$$\therefore \alpha = \beta \left(\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \right)$$

となる。また、 $2s = 2t \Leftrightarrow s = t$ から

$$\frac{1}{4} \sin \alpha = \frac{1}{8} \tan \beta$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{2} \quad (\because \alpha = \beta)$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \quad (\because \alpha \neq 0)$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3} \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

となる。よって $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$$

(1)

1回目のじゃんけんでは勝者がただ1人に決まるとき、勝者の選び方が n 通り、手の出し方がそれぞれ3通りあるから、求める確率は

$$n \cdot 3 \left(\frac{1}{3} \right)^n = n \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad n \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

(2)

1回目のじゃんけんであいこになるのは、 n 人全員が同じ手を出すか、 $n \geq 3$ のとき3種類の手が出ることである。全員が同じ手を出す確率は、手の出し方が3通りであることから

$$\left(\frac{1}{3} \right)^n \cdot 3 = \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

となる。 $n \geq 3$ のとき、3種類の手が出る場合の確率を、余事象を考えることで求める。 n 人全員が同じ手を出す場合の数は上記より3通りである。また、 n 人が出す手が2種類のみである場合の数は、手の選び方が3通りであることから

$$3 \cdot (2^n - 2) = 3 \cdot 2^n - 6$$

となる。よって n 人が出す手が3種類となる確率は

$$1 - \frac{3 \cdot 2^n - 6 + 3}{3^n} = 1 - 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + \frac{1}{3^{n-1}}$$

となる。よって1回目のじゃんけんであいことなる確率は、 $n=2$ のとき $\frac{1}{3}$ 、 $n \geq 3$ のとき

$$\left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} + 1 - 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + \frac{1}{3^{n-1}} = 1 - 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + \frac{2}{3^{n-1}}$$

となり、結局 $n \geq 2$ のとき

$$1 - 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + \frac{2}{3^{n-1}}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 1 - 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + \frac{2}{3^{n-1}}$$

(3)

2回のじゃんけんでは勝者が1人に決まる場合は

[1] 1回目のじゃんけんでは2～4人の勝者が出て、2回目のじゃんけんでは勝者が1人となる場合

[2] 1回目のじゃんけんであいこになり、2回目のじゃんけんでは勝者が1人となる場合

である。以下各場合について考えていく。

[1]の場合

1回目のじゃんけんでは k 人($2 \leq k \leq 4$)の勝者が出る確率は、勝者の選び方と手の出し方を考えて

$${}_5C_k \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^5 = \frac{{}_5C_k}{81}$$

となる。2回目のじゃんけんでは k 人のうち1人の勝者が決まる確率は、(1)の結果を用いて

$$k \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1}$$

となる。よって[1]の場合の確率は

$$\sum_{k=2}^4 \frac{{}_5C_k}{81} \cdot k \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} = \frac{10}{81} \cdot \frac{2}{3} + \frac{10}{81} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{81} \cdot \frac{4}{27} = \frac{290}{81 \cdot 27}$$

となる。

[2]の場合

1回目のじゃんけんであいことなる確率は、(2)の結果を用いて

$$1 - 2 \left(\frac{2}{3} \right)^4 + \frac{2}{3^4} = \frac{17}{27}$$

となる。2回目のじゃんけんでは勝者が1人に決まる確率は、(1)の結果を用いて

$$5 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^4 = \frac{5}{81}$$

となる。よって[2]の場合の確率は

$$\frac{17}{27} \cdot \frac{5}{81} = \frac{85}{81 \cdot 27}$$

となる。

以上[1],[2]より、求める確率は

$$\frac{290}{81 \cdot 27} + \frac{85}{81 \cdot 27} = \frac{125}{729}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{125}{729}$$

5

(1)

ℓ と C を表す式から y を消去して解くと

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - \sqrt{2})^2 &= 0 \\ \therefore x &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。これは $x \geq 0$ を満たすから、求める座標は

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

となる。

(答) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

(2)

ℓ 上の点 (p, p) ($p \geq 0$) と原点の距離が t であるとき

$$\begin{aligned}\sqrt{2p^2} &= t \\ \Leftrightarrow p &= \frac{t}{\sqrt{2}} \quad (\because p \geq 0)\end{aligned}$$

となるから、 $A(t)$ の座標は $\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ となる。 ℓ に直交する直線 ℓ_1 の傾きは -1 であるから、

$A(t)$ を通り ℓ に直交する直線 ℓ_1 の方程式は

$$y = -\left(x - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{t}{\sqrt{2}} = -x + \sqrt{2}t \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。 ℓ_1 と C が共有点を持つ条件は、2式から y を消去して得られる2次方程式

$$\begin{aligned}-x + \sqrt{2}t &= \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow x^2 + 2\sqrt{2}x - 4t + 2 &= 0 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

の判別式 D が 0 以上であることから

$$\begin{aligned}D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2})^2 - (-4t + 2) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow t &\geq 0\end{aligned}$$

となる。よって $t \geq 0$ のとき共有点を持ち、②よりその x 座標は

$$x = -\sqrt{2} \pm 2\sqrt{t}$$

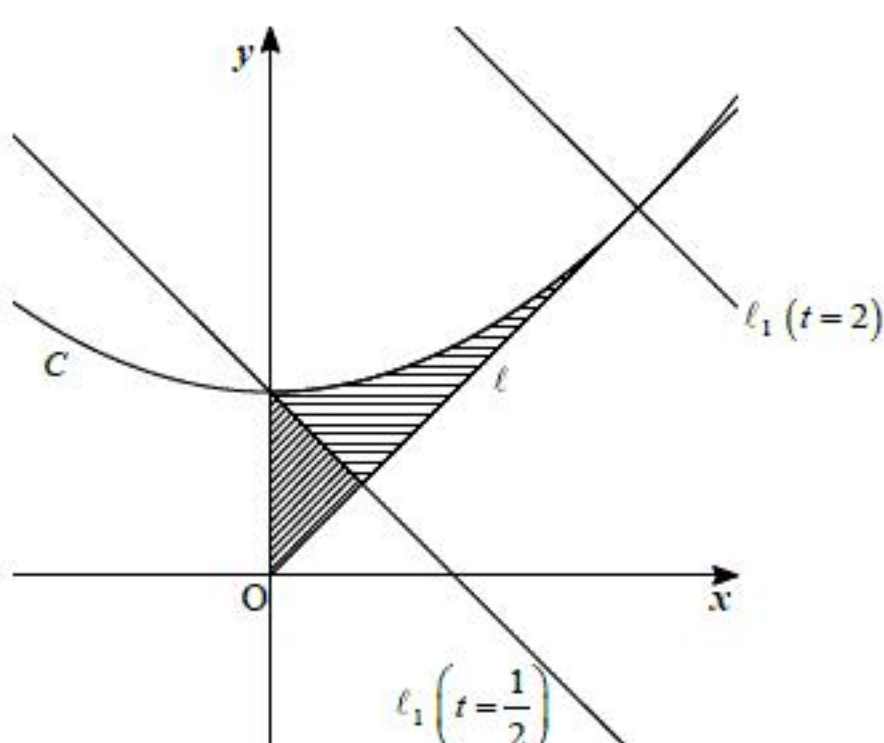
となる。①より求める座標は

$$(-\sqrt{2} \pm 2\sqrt{t}, \sqrt{2} \mp 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t) \quad (\text{複合同順})$$

となる。

(答) $(-\sqrt{2} \pm 2\sqrt{t}, \sqrt{2} \mp 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t)$ (複合同順)

(3)



上図斜線部と横線部を合わせたものを、 ℓ の周りに回転させた図形の体積を求めればよい。 $A(t)$ は ℓ 上の点であり、原点からの距離が t であるから、 $A(t)$ を利用して積分することを考える。斜線部を ℓ の周りに回転させて得られる立体の体積を V_1 、横線部のものを V_2 とする。

まず V_1 について考える。直線 ℓ_1 と y 軸の交点は①より $(0, \sqrt{2}t)$ であるから、半直線 ℓ と

$(0, \sqrt{2}t)$ の距離は

$$\sqrt{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}t\right)^2} = t \quad (\because t \geq 0)$$

となる。よって

$$V_1 = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 dt = \frac{\pi}{24}$$

となる。

次に V_2 について考える。 ℓ_1 と C の交点のうち、 x 座標の大きいものは(2)より

$(-\sqrt{2} + 2\sqrt{t}, \sqrt{2} - 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t)$ であり、これと半直線 ℓ の距離は

$$\sqrt{\left(-\sqrt{2} + 2\sqrt{t} - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{2} - 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} = (\sqrt{t} - \sqrt{2})^2$$

となる。よって

$$V_2 = \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 (\sqrt{t} - \sqrt{2})^4 dt$$

となる。ここで $\sqrt{s} = \sqrt{2} - \sqrt{t}$ と置換すると、

$$\begin{aligned}\frac{ds}{2\sqrt{s}} &= -\frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ \Leftrightarrow dt &= -\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}} ds \\ &= \frac{\sqrt{s} - \sqrt{2}}{\sqrt{s}} ds\end{aligned}$$

であり、

t	$\frac{1}{2} \rightarrow 2$
s	$\frac{1}{2} \rightarrow 0$

となるから、

$$\begin{aligned}V_2 &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^0 (\sqrt{t} - \sqrt{2})^4 dt \\ &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^0 (\sqrt{s})^4 \cdot \frac{\sqrt{s} - \sqrt{2}}{\sqrt{s}} ds \\ &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^0 \left(s^2 - \sqrt{2}s^{\frac{3}{2}}\right) ds \\ &= \pi \left[\frac{s^3}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{5} s^{\frac{5}{2}} \right]_{\frac{1}{2}}^0 \\ &= \frac{7}{120} \pi\end{aligned}$$

となる。よって求める体積は

$$V_1 + V_2 = \frac{\pi}{24} + \frac{7}{120} \pi = \frac{\pi}{10}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{10}$

(1)

$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ とおくと

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} &= \int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx \\
 &= \left[x(1-x^2)^{n+1} \right]_0^1 + 2(n+1) \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx \\
 &= -2(n+1) \int_0^1 \{(1-x^2)-1\} (1-x^2)^n dx \\
 &= -2(n+1) \int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx + 2(n+1) \int_0^1 (1-x^2)^n dx \\
 &= -2(n+1) I_{n+1} + 2(n+1) I_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow I_{n+1} &= \frac{2n+2}{2n+3} I_n \\
 &= \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{2n}{2n+1} \times \cdots \times \frac{4}{5} I_1
 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$I_1 = \int_0^1 (1-x^2) dx = \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

となるから

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} &= \frac{2n+2}{2n+3} I_n \\
 &= \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{2n}{2n+1} \times \cdots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \\
 &= \frac{2^{n+1} (n+1)! \times 2^{n+1} (n+1)!}{(2n+3)!} \\
 &= \frac{4^{n+1} \{(n+1)!\}^2}{(2n+3)!}
 \end{aligned}$$

となる。これは $n=0$ としてもなりたつから、

$$I_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

となり、題意は示された。

(証明終)

(2)

二項定理より、

$$(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k (-x^2)^k = \sum_{k=0}^n {}_n C_k (-1)^k x^{2k}$$

であり、

$$\int_0^1 x^{2k} dx = \left[\frac{1}{2k+1} x^{2k+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2k+1}$$

であるから

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \sum_{k=0}^n {}_n C_k (-1)^k \int_0^1 x^{2k} dx = \sum_{k=0}^n {}_n C_k \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

となる。また、

$${}_n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

であるから

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

となる。よって(1)の結果より

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

となるから、題意は示された。

(証明終)

(1)

第 k 群の項数は $2k-1$ であるから、求める項数は

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

となる。

(答) n^2

(2)

求める値は

$$2 \sum_{k=1}^n kn - n^2 = n^2(n+1) - n^2 = n^3$$

となる。

(答) n^3

(3)

自然数 N について、二つの自然数 a, b を用いて $N = a \times b$ ($b \geq a$)と分解できるときの b の最小値を b_N とおくと、最初に現れる N は第 b_N 群に属する。ここで

$$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$$

であるから、

$$2016 = 42 \cdot 48$$

$$b_N = 48$$

となる。よって、2016は第48群の42項目に最初に現れる。また、(1)より第47群の末項までの項数は

$$47^2 = 2209$$

となる。

$$2209 + 42 = 2251$$

より、最初に現れる2016は、この数列の

第2251項

となる。

(答) 第2251項

(1)

点 P_n, Q_n に対応する複素数をそれぞれ p_n, q_n とおき

$$\begin{cases} \alpha = \cos \theta + i \sin \theta \\ \beta = \cos \theta' + i \sin \theta' \end{cases}$$

とおけば、(i)(ii)より $k \geq 1$ において

$$q_k - p_{k-1} = \alpha(q_{k-1} - p_{k-1}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$p_k - q_k = \beta(p_{k-1} - q_k) \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。①と②より

$$\begin{aligned} p_k - q_k &= \beta[p_{k-1} - \{p_{k-1} + \alpha(q_{k-1} - p_{k-1})\}] \\ &= \alpha\beta(p_{k-1} - q_{k-1}) \\ &= (\alpha\beta)^k(p_0 - q_0) \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となり、①と③より

$$q_{k+1} - p_k = \alpha(q_k - p_k) = -\alpha(\alpha\beta)^k(p_0 - q_0) \quad \cdots \textcircled{4}$$

となり、③と④の辺々を足し合わせることにより

$$q_{k+1} - q_k = (\alpha\beta)^k(p_0 - q_0) - \alpha(\alpha\beta)^k(p_0 - q_0) = (1 - \alpha)(\alpha\beta)^k(p_0 - q_0) \quad \cdots \textcircled{5}$$

となる。⑤から

$$q_{k+2} - q_{k+1} = (1 - \alpha)(\alpha\beta)^{k+1}(p_0 - q_0) \quad \cdots \textcircled{6}$$

となるから、⑤と⑥の辺々を足し合わせることにより

$$q_{k+2} - q_k = (1 + \alpha\beta)(1 - \alpha)(\alpha\beta)^k(p_0 - q_0)$$

となる。ここで P_0, Q_0 は異なる点であるから $p_0 \neq q_0$ となるので、 $q_{k+2} = q_k$ のとき

$$\begin{aligned} 1 + \alpha\beta &= 0, 1 - \alpha = 0 \\ \Leftrightarrow \alpha\beta &= -1, \alpha = 1 \end{aligned}$$

となる。ここで n を整数として

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= -1 \Leftrightarrow \theta + \theta' = (2n+1)\pi \\ \alpha &= 1 \Leftrightarrow \theta = 2\pi n \end{aligned}$$

となるから、求める条件は

$$\theta = 2n\pi \text{ または } \theta + \theta' = (2n+1)\pi \quad (n \text{ は整数})$$

となる。

(答) $\theta = 2n\pi$ または $\theta + \theta' = (2n+1)\pi$ (n は整数)

(2)

$$\theta = -\theta' \Rightarrow \alpha\beta = 1$$

となるから、⑤より

$$q_{k+1} - q_k = (1 - \alpha)(p_0 - q_0)$$

となる。よって

$$\begin{aligned} q_n &= n(1 - \alpha)(p_0 - q_0) + q_0 \\ \Leftrightarrow q_n - q_0 &= n(1 - \alpha)(p_0 - q_0) \quad \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

となる。また、③と⑦により

$$\begin{aligned} p_{n-1} - q_{n-1} &= p_{n-1} - (n-1)(1 - \alpha)(p_0 - q_0) - q_0 = p_0 - q_0 \\ \Leftrightarrow p_{n-1} - q_0 &= \{n - (n-1)\alpha\}(p_0 - q_0) \quad \cdots \textcircled{8} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $|P_0 Q_0| = 1$ より

$$|p_0 - q_0| = 1 \quad \cdots \textcircled{9}$$

であり、 P_{n-1} が C の内部、 Q_n が C の外部にある条件から

$$|p_{n-1} - q_0| < r < |q_n - q_0| \quad \cdots \textcircled{10}$$

となる。よって⑦、⑨、⑩より

$$\begin{aligned} r &< |q_n - q_0| \\ \Leftrightarrow r &< |n(1 - \alpha)(p_0 - q_0)| = n|1 - \alpha| \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} r^2 &< n^2 |1 - \alpha|^2 \\ &= n^2 (1 - \alpha)(1 - \bar{\alpha}) \\ &= n^2 (1 - \alpha - \bar{\alpha} + \alpha\bar{\alpha}) \\ &= n^2 (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= 2n^2 (1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

となり、⑧、⑨、⑩より

$$\begin{aligned} r^2 &> |n - (n-1)\alpha|^2 \\ &= \{n - (n-1)\alpha\}\{n - (n-1)\bar{\alpha}\} \\ &= n^2 - n(n-1)(\alpha + \bar{\alpha}) + (n-1)^2 \alpha\bar{\alpha} \\ &= n^2 - 2n(n-1)\cos\theta + (n-1)^2 \end{aligned}$$

となる。よって r^2 の取りうる範囲は

$$n^2 - 2n(n-1)\cos\theta + (n-1)^2 < r^2 < 2n^2(1 - \cos\theta) \quad \cdots \textcircled{11}$$

となる。ここで上式左辺と右辺について

$$2n^2(1 - \cos\theta) - \{n^2 - 2n(n-1)\cos\theta + (n-1)^2\} = 2n(1 - \cos\theta) - 1$$

となるから、

$$2n(1 - \cos\theta) \leq 1$$

のとき、⑪を満たす r は存在しない。

(答) $2n(1 - \cos\theta) > 1$ のとき $n^2 - 2n(n-1)\cos\theta + (n-1)^2 < r^2 < 2n^2(1 - \cos\theta)$

$2n(1 - \cos\theta) \leq 1$ のとき、なし