

## 平成 28 年度入学試験問題

### 数 学

#### 注 意 事 項

1. この問題冊子は試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 解答用紙は問題冊子とは別になっているので、解答はすべて解答用紙の指定されたところに記入すること。また、解答用紙は問題ごとに別になっているので、注意すること。
3. 受験番号を解答用紙の指定されたところへ必ず記入すること。決して氏名を書いてはいけない。
4. この問題冊子は持ち帰ること。

#### 解答にあたっての注意事項

受験者は下の表にしたがって、志望学部学科の問題を解答すること。

| 学 部  | 学 科     | 解 答 す る 問 題                                                                                               |
|------|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 経法学部 | 全 学 科   | <span>1</span> ， <span>2</span> ， <span>3</span> ， <span>4</span> の 4 問                                   |
| 理学部  | 数 学 科   | <span>2</span> ， <span>3</span> ， <span>4</span> ， <span>5</span> ， <span>6</span> ， <span>7</span> の 6 問 |
| 医学部  | 医 学 科   | <span>4</span> ， <span>5</span> ， <span>6</span> ， <span>7</span> ， <span>8</span> の 5 問                  |
|      | 保 健 学 科 | <span>1</span> ， <span>2</span> ， <span>3</span> ， <span>4</span> の 4 問                                   |
| 工学部  | 全 学 科   | <span>2</span> ， <span>3</span> ， <span>4</span> ， <span>5</span> の 4 問                                   |

1

2つの変量  $x, y$  のデータが,  $n$  個の  $x, y$  の値の組として

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

のように与えられているとする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1)  $x, y$  の平均値をそれぞれ  $\bar{x}, \bar{y}$  とするとき, 変量  $x$  と  $y$  の共分散  $s_{xy}$  は

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n x_k y_k \right) - \bar{x} \bar{y}$$

であることを示せ。

- (2) これらのデータの間には,  $y_k = ax_k + b$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) という関係があるとする。ただし,  $a, b$  は実数で,  $a \neq 0$  である。変量  $x$  の標準偏差  $s_x$  は 0 でないとする。このとき,  $x$  と  $y$  の相関係数を求めよ。

2

曲線  $C: y = x^2$  と、 $C$  上の点  $P_1(-1, 1)$  と  $P_2(3, 9)$  を考える。線分  $P_1P_2$  を  $1:3$  に内分する点を  $H$ 、 $P_1$  における接線と  $P_2$  における接線の交点を  $Q$ 、線分  $HQ$  と曲線  $C$  との交点を  $R$  とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点  $H$  の座標を求めよ。
- (2) 点  $Q$  の座標を求めよ。
- (3) 直線  $HQ$  の方程式を求めよ。
- (4) 点  $R$  の座標を求めよ。
- (5) 線分  $P_2H$  と線分  $HR$  と曲線  $C$  で囲まれた部分の面積を求めよ。

3

平面上の点  $O, A, B, C$  に対して、 $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  のなす角を  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) とし、 $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OC}$  のなす角を  $\beta$  ( $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ) とする。さらに、 $\angle BOC = \alpha + \beta$ ,  $|\overrightarrow{OB}| = 2|\overrightarrow{OA}| = 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 1$  であるとする。 $\triangle OAB$ ,  $\triangle OAC$ ,  $\triangle OBC$  の面積をそれぞれ  $s, t, u$  とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $s, t, u$  を、それぞれ  $\alpha, \beta$  を用いて表せ。
- (2)  $2s = 2t = u$  であるとき、 $\alpha$  と  $\beta$  を求めよ。

4

$n$  を 2 以上の自然数とする。 $n$  人でじゃんけんをする。各人はグー, チョキ, パーをそれぞれ  $\frac{1}{3}$  の確率で出すものとする。勝者が 1 人に決まるまでじゃんけんを繰り返す。ただし, 負けた人はその後のじゃんけんには参加しない。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 1 回目のじゃんけんで, 勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。
- (2) 1 回目のじゃんけんで, あいこになる確率を求めよ。
- (3)  $n = 5$  のとき, ちょうど 2 回のじゃんけんで, 勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。

5

半直線  $\ell: y = x$  ( $x \geq 0$ ), 放物線  $C: y = \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$  を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 放物線  $C$  と半直線  $\ell$  が接する点の座標を求めよ。
- (2)  $t \geq 0$  とする。原点からの距離が  $t$  である  $\ell$  上の点を  $A(t)$  とするとき,  $A(t)$  を通り  $\ell$  に直交する直線と, 放物線  $C$  の共有点の座標を  $t$  を用いて表せ。
- (3) 放物線  $C$  と半直線  $\ell$  および  $y$  軸とで囲まれた図形を, 半直線  $\ell$  のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

|   |
|---|
| 6 |
|---|

$n$  を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1)  $\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$  を示せ。

(2)  $\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$  を示せ。

7

群に分けられた数列

$$1 \mid 2, 4, 2 \mid 3, 6, 9, 6, 3 \mid 4, 8, 12, 16, 12, 8, 4 \mid \cdots$$

を、第  $n$  群が  $(2n-1)$  個の項

$$n, 2n, \cdots, (n-2)n, (n-1)n, n^2, (n-1)n, (n-2)n, \cdots, 2n, n$$

からなるものとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 与えられた数列の初項から第  $n$  群の末項までの項数を求めよ。
- (2) 第  $n$  群に含まれる項の総和を求めよ。
- (3) 最初に現れる 2016 は、この数列の第何項か。



8

$P_0, Q_0$  を複素数平面上の異なる点とする。自然数  $k$  に対して、平面上の点  $P_k, Q_k$  を以下の条件 (i), (ii) を満たすものとして定める。

- (i) 線分  $P_{k-1}Q_{k-1}$  を  $P_{k-1}$  を中心として角  $\theta$  だけ回転させた線分が  $P_{k-1}Q_k$  となる。
- (ii) 線分  $P_{k-1}Q_k$  を  $Q_k$  を中心として角  $\theta'$  だけ回転させた線分が  $Q_kP_k$  となる。

以下の問いに答えよ。

- (1)  $Q_{k+2} = Q_k$  となるための、 $\theta$  と  $\theta'$  に関する条件を求めよ。
- (2)  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $\theta = -\theta'$ ,  $|Q_0P_0| = 1$  とする。 $Q_0$  を中心とし、半径が  $r$  の円を  $C$  とする。 $P_{n-1}$  は  $C$  の内部、 $Q_n$  は  $C$  の外部にあるという。このとき、 $r^2$  が取り得る値の範囲を  $n$  と  $\theta$  を用いて表せ。