

1

(1)

以下,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明する。

[1] $n=1$ の場合

このとき, ①の左辺, 右辺はともに1となるため, ①は確かに成立する。

[2] $n=k$ における①の成立を仮定した場合

仮定より,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + (k+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2 \{k^2 + 4(k+1)\} \\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2 \end{aligned}$$

となる。従って, $n=k+1$ の場合にも成立する。以上[1], [2]より, 任意の自然数 n について①は成立する。

(証明終)

(2)

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

とすると, (1)の結果より,

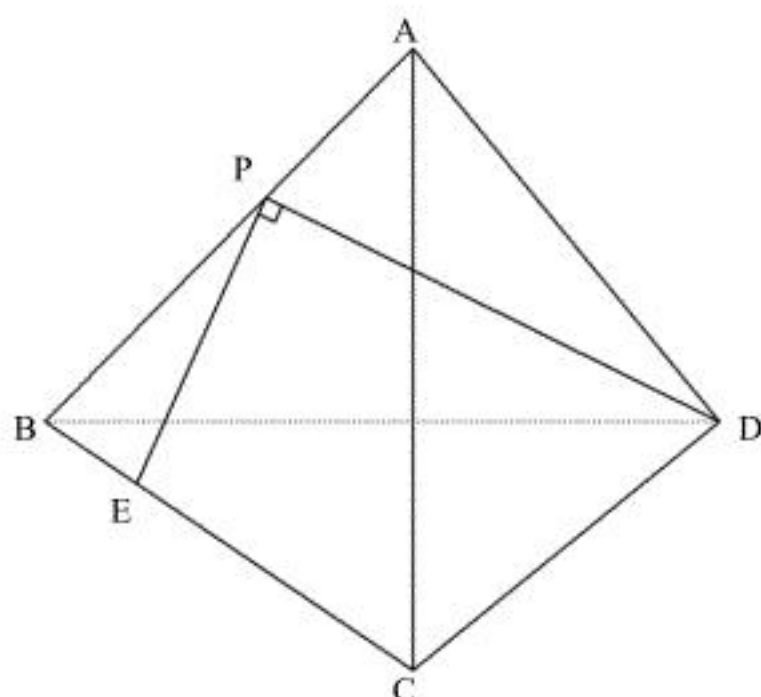
$$S_n = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

が成り立つ。従って,

$$\begin{aligned} 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + 99^3 &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 100^3) - (2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + 100^3) \\ &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 100^3) - 2^3 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 50^3) \\ &= S_{100} - 8S_{50} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 100^2 \cdot (100+1)^2 - 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot 50^2 \cdot (50+1)^2 \\ &= 50^2 \cdot 101^2 - 2 \cdot 50^2 \cdot 51^2 \\ &= 12497500 \end{aligned}$$

と求めることができる。

(答) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + 99^3 = 12497500$



一辺の長さが1の正四面体として一般性を失わない。 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とすると,

$$|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

である。点Pは辺AB上の点であるから、実数 k を用いて、

$$\overrightarrow{AP} = k\vec{b}$$

と表せる。また、点Eは辺BCを1:5に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{AE} = \frac{5}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$$

となるので、

$$\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP} = \vec{d} - k\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AP} = \left(\frac{5}{6} - k\right)\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$$

と表せる。したがって、

$$\angle DPE = 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PD} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \left(\frac{5}{6} - k \right) \vec{b} + \frac{1}{6} \vec{c} \right\} \cdot (\vec{d} - k\vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6} - k \right) \vec{b} \cdot \vec{d} - k \left(\frac{5}{6} - k \right) |\vec{b}|^2 + \frac{1}{6} \vec{c} \cdot \vec{d} - \frac{k}{6} \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 - \frac{17}{12}k + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 12k^2 - 17k + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3k - 2)(4k - 3) = 0$$

$$\therefore k = \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$$

となるから、AP:PBは2:1または3:1である。

(答) AP:PB = 2:1 または 3:1