

1

(1)

以下,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明する。

[1] $n=1$ の場合

このとき, ①の左辺, 右辺はともに1となるため, ①は確かに成立する。

[2] $n=k$ における①の成立を仮定した場合

仮定より,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + (k+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2 \{k^2 + 4(k+1)\} \\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2 \end{aligned}$$

となる。従って, $n=k+1$ の場合にも成立する。以上[1], [2]より, 任意の自然数 n について①は成立する。

(証明終)

(2)

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

とすると, (1)の結果より,

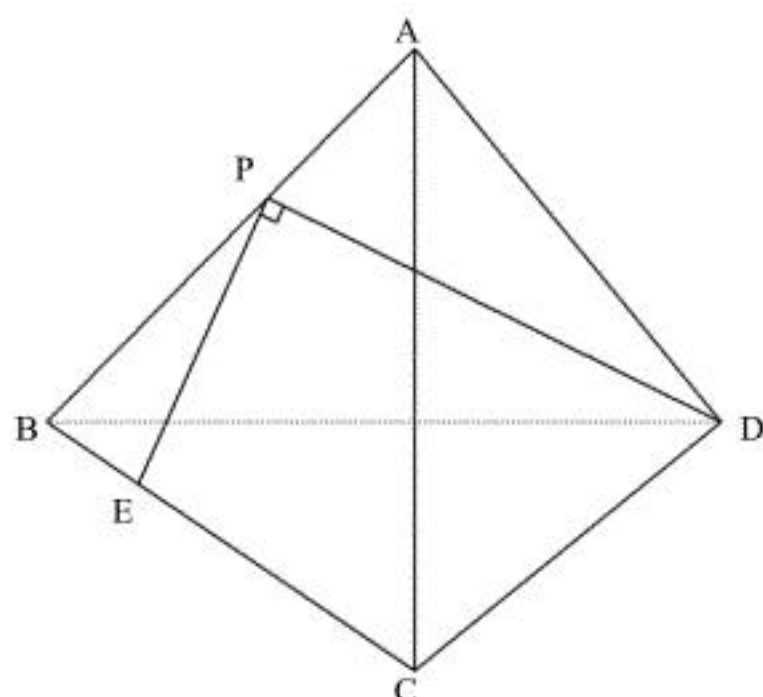
$$S_n = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

が成り立つ。従って,

$$\begin{aligned} 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + 99^3 &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 100^3) - (2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + 100^3) \\ &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 100^3) - 2^3 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 50^3) \\ &= S_{100} - 8S_{50} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 100^2 \cdot (100+1)^2 - 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot 50^2 \cdot (50+1)^2 \\ &= 50^2 \cdot 101^2 - 2 \cdot 50^2 \cdot 51^2 \\ &= 12497500 \end{aligned}$$

と求めることができる。

(答) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + 99^3 = 12497500$



一辺の長さが1の正四面体として一般性を失わない。 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とすると,

$$|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

である。点Pは辺AB上の点であるから、実数 k を用いて、

$$\overrightarrow{AP} = k\vec{b}$$

と表せる。また、点Eは辺BCを1:5に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{AE} = \frac{5}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$$

となるので、

$$\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP} = \vec{d} - k\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AP} = \left(\frac{5}{6} - k\right)\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$$

と表せる。したがって、

$$\angle DPE = 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PD} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \left(\frac{5}{6} - k \right) \vec{b} + \frac{1}{6} \vec{c} \right\} \cdot (\vec{d} - k\vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6} - k \right) \vec{b} \cdot \vec{d} - k \left(\frac{5}{6} - k \right) |\vec{b}|^2 + \frac{1}{6} \vec{c} \cdot \vec{d} - \frac{k}{6} \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 - \frac{17}{12}k + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 12k^2 - 17k + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3k - 2)(4k - 3) = 0$$

$$\therefore k = \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$$

となるから、AP:PBは2:1または3:1である。

(答) AP:PB = 2:1 または 3:1

(1)

真数は正であるから $x > 0$ である。

$$f(x) = \sqrt{x} - \log x \quad (x > 0)$$

とすると、

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$$

であるから、増減表は次のようになる。

x	(0)	...	4	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって $x > 0$ において、

$$f(x) \geq f(4) = 2 - \log 4 = 2(1 - \log 2) > 0 \quad (\because 2 < e)$$

であるので、

$$f(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - \log x > 0$$

$$\therefore \log x < \sqrt{x}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

(1)の結果より、

$$\log x < \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (\because x > 0)$$

が成り立つ。ここで、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

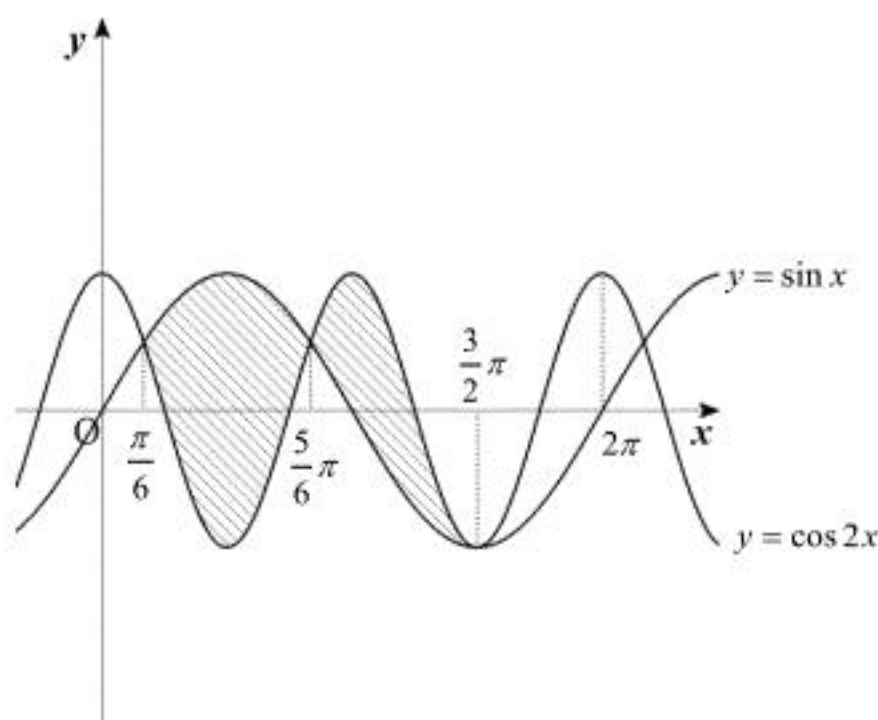
であり、 $x > 1$ のときに $\frac{\log x}{x} > 0$ であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

であることが分かる。

(答) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$

2 曲線 $y = \cos 2x$, $y = \sin x$ は以下のようになる。



$0 \leq x \leq 2\pi$ における $y = \cos 2x$ と $y = \sin x$ の交点の x 座標は,

$$\cos 2x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -1, \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

である。従って、求める面積は,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} (\sin x - \cos 2x) dx + \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (\cos 2x - \sin x) dx &= \left[-\cos x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} + \left[\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x \right]_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

(1)

$$f(x) = xe^x$$

とすると,

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

より,

$$f'(1) = 2e$$

であるから, 接線 l の方程式は,

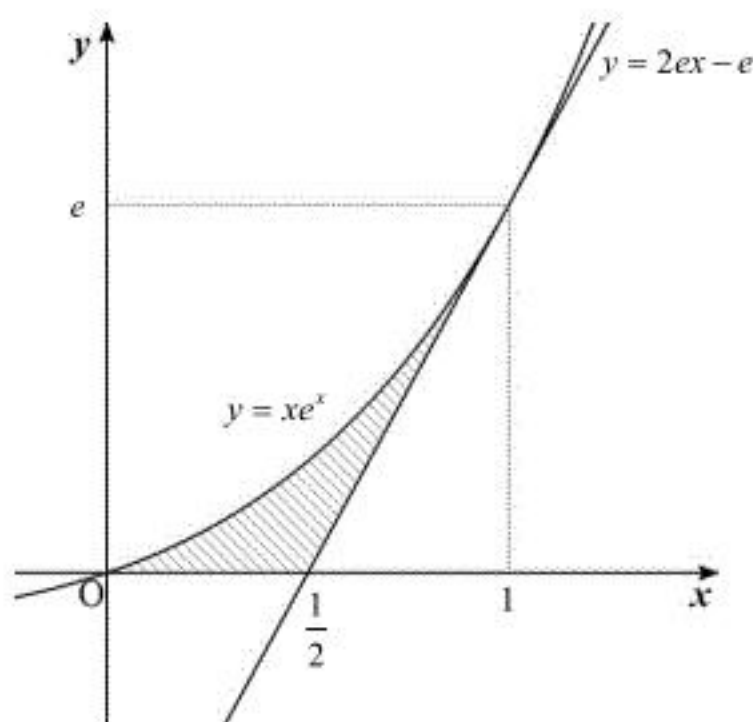
$$y - e = 2e(x - 1)$$

$$\therefore y = 2ex - e$$

である。

(答) $y = 2ex - e$

(2)



求める体積は, 上図の斜線部を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積である。求める体積を V とすると, V は曲線 $y = xe^x$ と x 軸, 直線 $x = 1$ によって囲まれる部分を x 軸のまわ

りに1回転させてできる立体の体積から底面の半径が e で高さが $\frac{1}{2}$ の円錐の体積を引くことで得られるため,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (xe^x)^2 dx - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot e^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx - \frac{\pi e^2}{6} \end{aligned}$$

と表せる。ここで,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{2x} dx &= \left[x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 2x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \int_0^1 x e^{2x} dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \left(\left[x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2x} dx \right) \\ &= \left[\frac{1}{4} e^{2x} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^2 - 1}{4} \end{aligned}$$

であるから,

$$V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{4} - \frac{\pi e^2}{6} = \frac{\pi(e^2 - 3)}{12}$$

である。

(答) $\frac{\pi(e^2 - 3)}{12}$