$\boxed{1}$

(1)

$$\left(2^x-2^{-x}\right)^2=4^x-2+4^{-x}$$
$$\Leftrightarrow 4^x+4^{-x}=X^2+2$$

が成立する。これを方程式に代入して,

$$4^x-3\cdot 2^x+3\cdot 2^{-x}+4^{-x}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(4^x+4^{-x}\right)-3\left(2^x+2^{-x}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow X^2+2-3X=0$$
$$\Leftrightarrow X^2-3X+2=0$$

となる。

(答) $X^2-3X+2=0$

(2)

(1)より,

$$X^2-3X+2=0$$
$$\Leftrightarrow (X-2)(X-1)=0$$
$$\Leftrightarrow X=1,\ 2$$
$$\Leftrightarrow 2^x-2^{-x}=1,\ 2$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-2^x-1=0 \text{ または } \left(2^x\right)^2-2\cdot 2^x-1=0$$

$$\Leftrightarrow 2^x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},\ 1\pm\sqrt{2}$$

が成立する。x が実数であるとき $2^x>0$ であるので

$$2^x=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ 1+\sqrt{2}$$

となる。よって,方程式の実数解は,

$$x=\log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\ \log_2\left(1+\sqrt{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow x=\log_2\left(1+\sqrt{5}\right)-1,\ \log_2\left(1+\sqrt{2}\right)$$

である。

(答) $x=\log_2\left(1+\sqrt{5}\right)-1,\ \log_2\left(1+\sqrt{2}\right)$

$\boxed{2}$

(1)

A を始点とするベクトルを考える。このとき,

$$\overrightarrow{AB}=(2-1,\,0-1,\,1-2)=(1,\,-1,\,-1)$$
$$\overrightarrow{AC}=(1-1,\,1-1,\,0-2)=(0,\,0,\,-2)$$
$$\overrightarrow{AD}=(3-1,\,4-1,\,6-2)=(2,\,3,\,4)$$

である。D から平面 ABC 上に下ろした垂線の足を点 F とおく。このとき,実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF}&=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\\&=s(1,\,-1,\,-1)+t(0,\,0,\,-2)\\&=(s,\,-s,\,-s-2t)\end{aligned}$$

とおけ,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF}&=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}\\&=(s-2,\,-s-3,\,-s-2t-4)\end{aligned}$$

となる。DF は平面 ABC と垂直であるので

$$\begin{cases}\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AB}=0 & \cdots ① \\ \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AC}=0 & \cdots ②\end{cases}$$

が成り立つ。①より,

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\&\Leftrightarrow (s-2)\cdot 1+(-s-3)\cdot(-1)+(-s-2t-4)\cdot(-1)=0\\&\Leftrightarrow 3s+2t+5=0 \qquad \cdots ③\end{aligned}$$

であり,②より

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\&\Leftrightarrow (s-2)\cdot 0+(-s-3)\cdot 0+(-s-2t-4)\cdot(-2)=0\\&\Leftrightarrow 2s+4t+8=0\\&\Leftrightarrow s+2t+4=0 \qquad \cdots ④\end{aligned}$$

である。したがって,③−④より

$$2s+1=0 \Leftrightarrow s=-\frac{1}{2}$$

であり,これを③に代入して

$$3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2t+5=0 \Leftrightarrow t=-\frac{7}{4}$$

である。以上より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF}&=\left(-\frac{1}{2}-2,\,\frac{1}{2}-3,\,\frac{1}{2}+2\cdot\frac{7}{4}-4\right)\\&=\left(-\frac{5}{2},\,-\frac{5}{2},\,0\right)\end{aligned}$$

であるので

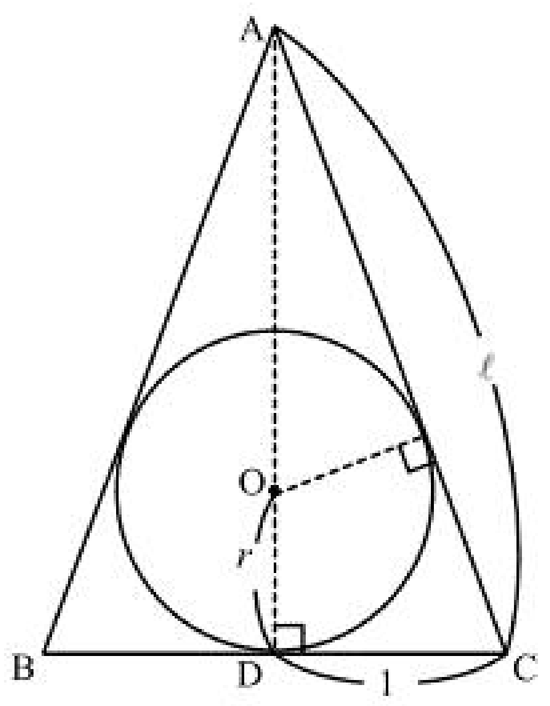
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE}&=\overrightarrow{OD}+2\overrightarrow{DF}\\&=(3,\,4,\,6)+(-5,\,-5,\,0)\\&=(-2,\,-1,\,6)\end{aligned}$$

となり,E の座標は $(-2,\,-1,\,6)$ となる。

(答) $(-2,\,-1,\,6)$

3

(1)



円錐の頂点と球の中心を通るように図形を切ったときの断面をとり，断面の三角形の面積を考える。図のように点 A ～ D, O を定める。ここで，△ACD は直角三角形で， AC は斜辺であるから

$$\mathrm{AC} > \mathrm{CD}$$
$$\Leftrightarrow \ell > 1$$

が成立する。△ACD において三平方の定理より

$$\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{AC}^2 - \mathrm{CD}^2} = \sqrt{\ell^2 - 1}$$

が成立するので，△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AD} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{\ell^2-1} = \sqrt{\ell^2-1}$$

である。また，△ABC を3つの三角形，△OAB，△OBC，△OCA に分けて考えて，面積を

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot r + \frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot r + \frac{1}{2}\cdot\mathrm{CA}\cdot r = \frac{1}{2}\cdot\ell\cdot r + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot r + \frac{1}{2}\cdot\ell\cdot r = (\ell+1)r$$

と表せる。これらを比較して，

$$\sqrt{\ell^2-1} = (\ell+1)r \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{\ell^2-1}}{\ell+1}$$

となる。

(答) $r = \dfrac{\sqrt{\ell^2-1}}{\ell+1}$

(2)

円錐の展開図における扇形の中心角を θ とおくと，扇形の弧の長さと底面の円の円周の長さは等しいので，

$$\ell\theta = 2\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{\ell}$$

となる。よって，V の表面積は

$$\pi\ell^2\cdot\frac{\frac{2\pi}{\ell}}{2\pi} + \pi\cdot 1^2 = \pi(\ell+1)$$

となる。球 S の表面積は

$$4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{\sqrt{\ell^2-1}}{\ell+1}\right)^2 = \frac{4\pi(\ell-1)}{\ell+1}$$

である。よって，S の表面積 / V の表面積は

$$\frac{\frac{4\pi(\ell-1)}{\ell+1}}{\pi(\ell+1)} = \frac{4(\ell-1)}{(\ell+1)^2}$$

である。これを $f(\ell)$ とおくと，

$$f'(\ell) = 4\cdot\frac{(\ell+1)^2 - (\ell-1)\cdot 2(\ell+1)}{(\ell+1)^4} = \frac{-4(\ell-3)(\ell+1)}{(\ell+1)^4}$$

となり，$1 < \ell$ における増減表は下図のようになる。

ℓ	1	…	3	…
$f'(\ell)$		+	0	−
$f(\ell)$		↗	極大	↘

よって，増減表より，$f(\ell)$ は $\ell = 3$ で最大値

$$f(3) = \frac{4(3-1)}{(3+1)^2} = \frac{1}{2}$$

をとる。

(答) $\dfrac{1}{2}$

4

(1)

$y = x^a \log x\,(x > 0)$ について，両辺を微分して

$$\begin{aligned} y' &= ax^{a-1}\log x + x^a \cdot \frac{1}{x} \\ &= x^{a-1}(a\log x + 1) \end{aligned}$$

となる。$a > 0$ に注意して，増減表は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{a}}$	$\cdots$
y'	／	$-$	0	$+$
y	／	↘	極小	↗

よって，増減表より，$x = e^{-\frac{1}{a}}$ のとき極小値

$$\left(e^{-\frac{1}{a}}\right)^a \cdot \log e^{-\frac{1}{a}} = -\frac{1}{ae}$$

をとり，極大値はない。

(答) $x = e^{-\frac{1}{a}}$ のとき極小値 $-\dfrac{1}{ae}$，極大値はなし

(2)

$0 < x < 1$，$a > 0$ において，$x^a > 0, \log x < 0$ が成立するので

$x^a \log x < 0$ ・・・①

が成立する。また，(1)より $0 < x < 1$ において $-\dfrac{1}{ae} \leqq x^a \log x$ が成立する。この式の a を $\dfrac{a}{2}$ に置き換えて，

$$-\frac{2}{ae} \leqq x^{\frac{a}{2}} \log x$$

となり，両辺に $x^{\frac{a}{2}}\,(> 0)$ をかけると

$-\dfrac{2}{ae} x^{\frac{a}{2}} \leqq x^a \log x$ ・・・②

が成立する。以上より，①，②から

$$-\frac{2}{ae} x^{\frac{a}{2}} \leqq x^a \log x < 0$$

が成立することが示された。

(証明終)

(3)

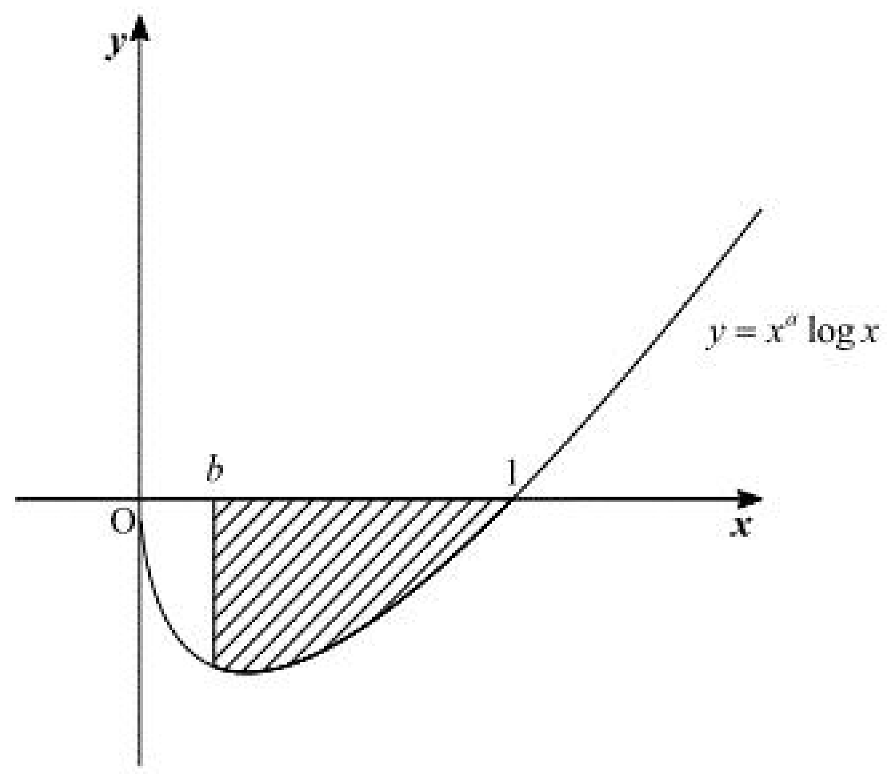
(2)より $0 < x < 1$ のとき $-\dfrac{2}{ae} x^{\frac{a}{2}} \leqq x^a \log x < 0$ が成立し，また，$a > 0$ より，$\displaystyle\lim_{x \to +0}\left(-\frac{2}{ae} x^{\frac{a}{2}}\right) = 0$ が成立する。よって，はさみうちの原理より

$$\lim_{x \to +0} x^a \log x = 0$$

となる。

(答) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^a \log x = 0$

(4)



求める領域の面積 $S(b)$ は，上のグラフにおける斜線部分の面積であり，

$$\begin{aligned} S(b) &= \int_b^1 \left(-x^a \log x\right) dx \\ &= \left[-\frac{x^{a+1}\log x}{a+1}\right]_b^1 + \int_b^1 \frac{x^a}{a+1} dx \\ &= \left[-\frac{x^{a+1}\log x}{a+1} + \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2}\right]_b^1 \\ &= \frac{1}{(a+1)^2} - \left\{-\frac{b^{a+1}\log b}{a+1} + \frac{b^{a+1}}{(a+1)^2}\right\} \end{aligned}$$

となる。よって，

$$\begin{aligned} \lim_{b \to +0} S(b) &= \lim_{b \to +0}\left[\frac{1}{(a+1)^2} - \left\{-\frac{b^{a+1}\log b}{a+1} + \frac{b^{a+1}}{(a+1)^2}\right\}\right] \\ &= \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{a+1}\lim_{b \to +0}\left(b \cdot b^a \log b\right) \\ &= \frac{1}{(a+1)^2} \quad \left(\because \lim_{x \to +0} x^a \log x = 0\right) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\dfrac{1}{(a+1)^2}$